Agrégation interne
2016-2017

Suites numériques

Exercice 1 : Etudier les limites (existence et valeur éventuelle) des suites :

1. (Auliac-Caby p. 11) $u_n = (2 + (-1)^n)^{\frac{1}{n}}$.
2. (Monier Ed. 2000 p. 60) $v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$, puis $w_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
3. $t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ pour $n \geq 1$.

Exercice 2 : (Dantzer p. 81) On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = \cos n\theta$, $v_n = \sin n\theta$

1. (a) Ecrire, pour tout entier $n > 0$, $(u_{n+1} - u_{n-1})$ en fonction de v_n.
   (b) Ecrire, pour tout entier $n > 0$, $(v_{n+1} - v_{n-1})$ en fonction de u_n.
2. Etudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en discutant selon les valeurs de $\sin\theta$.

Exercice 3 : (Gourdon p. 197) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite complexe convergente de limite ℓ. Montrer que la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ converge vers ℓ. Etudier la réciproque.

Exercice 4 : (Auliac - Caby p. 16) Montrer que si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite monotone qui converge au sens de Césaro, elle converge (et admet la même limite que la suite de ses moyennes).

Exercice 5 : (Gourdon p. 201) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.

1. On suppose $u_0 < 1$. Montrer qu'il existe $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $u_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$.
2. Etudier les cas $u_0 = 1$ et $u_0 > 1$.
3. Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \prod_{i=1}^{n} u_i$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6 : (Auliac - Caby p. 19) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente, de limite l. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$$

1. Montrer $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Trouver $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{kz+1}{(n-k)!(k-1)!k^2}$.
3. On considère la suite de terme général $u_n = \exp(2i\pi n\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Cette suite est-elle convergente ? On lui associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme ci-dessus. Etudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Conclusion ?

Exercice 7 : (Kaczor - Nowak p. 61) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les sous-suites (a_{2n}), (a_{2n+1}) et (a_{3n}) convergent.

1. Prouver la convergence de la suite (a_n).
2. La convergence de deux de ces sous-suites implique-t-elle la convergence de la suite (a_n) ?

Exercice 8 : (Monnier 2000 p. 64-65)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle non majorée. Montrer qu'il existe une suite extraite tendant vers $+\infty$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle monotone. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 9 : (Auliac - Caby p. 20)

1. Soit (u_n) une suite réelle et $a \in \mathbb{R}$. Etablir l'équivalence des trois énoncés suivants :
   (a) Il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers a.
   (b) Pour tout $r > 0$, l'intervalle $]a-r, a+r[$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).
   (c) $\forall \epsilon > 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \ldots, p\}$ $|u_n - a| < \epsilon$.

   Tout nombre réel a qui vérifie ces conditions est appelé **valeur d'adhérence** de la suite.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :
   $\bullet u_n = \cos n\frac{\pi}{2}$ $\bullet\, u_n = \sqrt{n}$ $\bullet\, u_n = \frac{12n+10^{-n}}{3n+2}$ $\bullet\, u_n = (1+\sin\frac{n\pi}{2})\ln n$ $\bullet\, u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^n\sqrt{k^2+1}$
3. Que peut-on dire de l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite convergente ? Réciproque ? Etudier le cas d'une suite monotone ayant une valeur d'adhérence.

Exercice 10 : (Auliac - Caby p. 24) Soit (u_n) une suite réelle. On pose

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(\sup_{k\geq n} u_k) \quad \text{et} \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(\inf_{k\geq n} u_k)$$

Ces éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ s'appellent respectivement la limite supérieure et la limite inférieure de la suite (u_n). On trouve aussi les notations $\limsup_{n\to\infty} u_n$ et $\liminf_{n\to\infty} u_n$.

1. Etablir $\underline{\lim}_{n\to\infty} u_n = \sup_n(\inf_{k\geq n} u_k)$ et $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n = \inf_n(\sup_{k\geq n} u_k)$.
2. Donner $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n$ et $\underline{\lim}_{n\to\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants :
   $\bullet u_n = (n+1)^{(-1)^n}$ $\bullet\, u_n = (2+\cos\frac{n\pi}{2})\frac{n}{2n+1}$ $\bullet\, un = \frac{11n+2\cos n\pi}{\sqrt{2n^2+n-1}}$
3. Etudier $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n$ et $\underline{\lim}_{n\to\infty} u_n$ lorsque (u_n) est une suite monotone.
4. Soit $l \in \mathbb{R}$; prouver que
$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \Leftrightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} u_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} u_n = l$$
5. Supposons (u_n) bornée et soit $\mathrm{adh}(u_n)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Prouver $\underline{\lim}_{n\to\infty} u_n = \inf \mathrm{adh}(u_n)$ et $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n = \sup \mathrm{adh}(u_n)$.

Exercice 11 : (Auliac - Caby p. 18) Soit $r > 1$. La suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ est définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$ par $n^r u_n - (n-1)^r u_{n-1} = n$ est-elle convergente ? (Introduire la suite $v_n = n^r u_n$).

Exercice 12 : (Gourdon p. 198) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $u_0 > 0,\ u_1 > 0,\ \lambda > 0$, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \lambda\sqrt{u_{n+1}u_n}$. Donner u_n en fonction de u_0, u_1 et n.

Exercice 13 : (Monier Ed. 2000 p.65) Exemple d'étude d'une suite homographique.

Soit la suite réelle définie par $\left\{\begin{array}{c} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n+3} \end{array}\right.$

On pose $E = \{u_0;\ \exists n \in \mathbb{N}\ u_n = -3\}$. Soit $f : \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R}^*,\ x \mapsto \frac{1}{x+3}$

1. Montrer que f est une bijection.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ $(*)$
3. Soit λ une racine de $(*)$. Montrer $u_0 \neq \lambda \Rightarrow \forall n,\ u_n \neq \lambda$.
4. Calculer l'accroissement moyen de f.
5. Soient α et β les deux solutions de $(*)$ telles que $\alpha > \beta$. On suppose que $u_0 \notin E \cup \{\alpha, \beta\}$. On pose $v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$
   (a) Monter que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
   (c) Donner une expression de u_n.
   (d) Expliciter E

Pour une étude complète des suites homographiques, consulter Monier Ed. 2006 p.119 par exemple.

Exercice 14 : (De Biasi p.116)

1. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 2,25$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$.
2. Quelle est la vitesse de convergence de la suite ?

Exercice 15 : (Monier Ed. 2006 p. 113) Etudier les suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 > 0,\ u_1 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (u_n^2 u_{n+1})^{\frac{1}{3}} \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1 + i \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{4}(3u_n - i\bar{u}_n) \end{cases}$

Exercice 16 : (Monier Ed. 2000 p. 65) Etudier la suite suivante : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2-\sqrt{u_n}} \end{cases}$

Exercice 17 : (Monier Ed. 2006 p. 114 à 116) Etudier les suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^+ \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8) \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n} \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^+ \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2} \end{cases}$

Exercice 18 : (Monier Ed. 2006 p. 112) On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$ et :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 2n^2$.

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = an^2 + bn + c$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n + 2n^2$.
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$, avec (a, b, c) obtenus à la question précédente. Quelle est la nature de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Donner une expression de u_n en fonction de n, pout tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19 : Méthode de Richardson (Pour l'étude de cette suite et l'accélération de la convergence, Dantzer p. 152 et suivantes)

1. Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe 3 réels λ, h_1 et h_2 tels que $u_n = l + \lambda h_1^n + O(h_2^n)$, avec $|h_2| < |h_1| < 1$, on ne connaît ni l ni λ. On pose $v_n = \frac{u_{n+1} - h_1 u_n}{1 - h_1}$. Montrer que la suite (v_n) converge plus vite vers l que (u_n) et que l'on a : $v_n = l + O(h_2^n)$.
2. Soit la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n \sin(\frac{\pi}{2^n})$.
   (a) Montrer que pour $n \geq 2$, u_n est le demi périmètre d'un polygone régulier convexe à 2^n cotés, inscrit dans un cercle de rayon 1.
   (b) Montrer que l'on peut calculer u_n sans utiliser π.
   (c) Montrer que $u_n = \pi - \frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n} + O(\frac{1}{16^n})$.
   (d) Appliquer la méthode précédente pour accélérer la convergence.

Bibliographie :

- G. Auliac et J.Y. Caby : Exercices corrigés d'Analyse pour le Capes et l'Agrégation interne
- J.M. Monier : Analyse MPSI - Editions 2000 et 2006
- J.F Dantzer : Mathématiques pour l'agrégation interne : Analyse et Probabilités.
- W.J. Kaczor et M.T. Nowak (Traduction E. Kouris) : Problèmes d'Analyse I - Nombres réels, suites et séries - Exercices corrigés - EDP Sciences.
- X.Gourdon : Les Mathématiques en tête Analyse.
- J. de Biasi : Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation interne.