Agrégation interne
2016/2017
Mathématiques

Suites et séries de fonctions.

Dans toute la suite I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et, pour tout entier n, f_n est une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

1 Suites de fonctions

1.1 Notions de convergence

Définition 1.1. *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f si pour tout $x \in I$ la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. Autrement dit si*

$$\forall x \in I,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Exemple 1.1. *Soit $I = [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction f_n définie sur I par $f_n(x) = x^n$. Si $x \in [0,1[$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ et pour $x = 1$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$. Conclusion, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$.*

Définition 1.2. *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers f si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

De façon équivalente, la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers f si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

autrement dit si la suite (de nombres) $(\sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|)_n$ tend vers 0. On note en général

$$\|f_n - f\|_\infty := \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

Remarque 1.1. *La convergence uniforme entraine la convergence simple (vers la même limite) mais la réciproque est fausse. Dans la pratique on commence par déterminer la limite f en étudiant la convergence simple et on étudie ensuite la convergence uniforme.*

Exemple 1.2. *On reprend l'exemple précédent. D'après la remarque ci-dessus, si* $(f_n)_n$ *converge uniformément c'est vers la fonction nulle. Pour tout* $x \in I$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $|f_n(x) - 0| = |x^n|$*. On en déduit que* $\sup_{x\in I} |f_n(x)| = 1$ *et donc que* $(f_n)_n$ *ne converge pas uniformément sur* $[0, 1]$.

On se place maintenant sur l'intervalle $I = [0, \frac{1}{2}]$*. Pour tout* $x \in I$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$|f_n(x) - 0| = |x^n| \leq \frac{1}{2^n}.$$

On en déduit que $\sup_{x\in I} |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{2^n}$ *et donc que* $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* $[0, \frac{1}{2}]$ *vers la fonction nulle.*

1.2 Propriétés

Théorème 1.1 (Continuité). *Si* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* I *et si pour tout* n *la fonction* f_n *est continue en* $x_0 \in I$ *alors la fonction* f *est continue en* x_0.

Remarque 1.2. *La convergence simple ne suffit pas à assurer la continuité de la limite comme le montre l'exemple 1.1 en* $x_0 = 1$.

Remarque 1.3. *Comme pour tous les résultats concernant les limites, il suffit que les fonctions* f_n *soient continues en* x_0 *à partir d'un certain rang.*

Théorème 1.2 (Intégration). *Si* $(f_n)_n$ *est une suite de fonctions continues par morceaux qui converge uniformément vers* f *sur un segement* $[a, b]$ *alors la fonction* f *est intégrable (au sens de Riemann) et on a* $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Théorème 1.3 (Convergence dominée). *Si* $(f_n)_n$ *est une suite de fonctions continues par morceaux qui converge simplement sur* I *vers une* f *continue par morceaux, et si de plus il existe une fonction intégrable* g *telle que*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

alors la fonction f *est intégrable et on a* $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Remarque 1.4. *Ce second théorème est plus utile dans la pratique :*

1) il évite de devoir montrer la convergence uniforme.

2) il est valable même si I *n'est pas un segment, par exemple sur un intervalle de la forme* $[a, +\infty[$.

Il faut cependant bien faire attention à l'hypothèse de domination : la fonction g *ne doit pas dépendre de* n.

Théorème 1.4 (Dérivation). *Si* $(f_n)_n$ *est une suite de fonctions de classe* C^1 *sur* I *telle que la suite* $(f_n')_n$ *converge uniformément vers* g *et il existe* $x_0 \in I$ *tel que* $(f_n(x_0))_n)$ *converge, alors la suite* $(f_n)_n$ *converge vers une fonction* f*, uniformément sur tout intervalle borné* $J \subset I$*. De plus* f *est de classe* C^1 *sur* I *et* $f' = g$.

2 Séries de fonctions

2.1 Notions de convergence

Définition 2.1. *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement sur* I *vers* f *si pour tout* $x \in I$ *la série* $\sum f_n(x)$ *converge et que sa somme est* $f(x)$*, autrement dit si la suite des sommes partielles* $(S_n(f))_n$ *où* $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ *converge simplement vers* f*.*

Exemple 2.1. *On reprend l'exemple 1.1. Pour tout* $x \in [0,1[$ *la série* $\sum x^n$ *converge et sa somme est* $f(x) = \frac{1}{1-x}$*. Par contre la série ne converge pas pour* $x = 1$*. La série de fonction* $\sum f_n$ *converge donc simplement vers la fonction* f *sur l'intervalle* $[0,1[$.

Définition 2.2. *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* I *vers* f *si la suite des sommes partielles* $(S_n(f))_n$ *où* $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ *converge uniformément sur* I *vers* f*. De façon équivalente, la suite* $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* I *vers* f *si*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} f_k - f \right\|_\infty = 0.$$

Remarque 2.1. *Ici encore, la convergence uniforme entraine la convergence simple mais la réciproque est fausse et dans la pratique on commence par déterminer la limite* f *en étudiant la convergence simple et on étudie ensuite la convergence uniforme.*

Dans le cas des séries de fonctions on introduit un troisième type de convergence.

Définition 2.3. *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge normalement sur* I *si la série* $\sum \|f_n\|_\infty$ *converge.*

Dans la pratique il n'est pas toujours évident de calculer explicitement $\|f_n\|_\infty$ et on utilise la formulation équivalente suivante : la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I s'il existe une suite $(a_n)_n$ telle que

- $|f_n(x)| \leq a_n$ pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit $\|f_n\|_\infty \leq a_n$,
- $\sum a_n$ converge.

L'intérêt de l'a convergence normale est qu'il est souvent difficile de montrer directement la convergence uniforme. Cela nécessite de savoir contrôler le reste d'une série convergente. C'est par exemple le cas lorsqu'on a affaire à des séries alternées mais souvent difficile sinon. La notion de convergence normale a l'avantage d'être plus facile à montrer que la convergence uniforme et d'être plus forte :

Proposition 2.1. *Si la série* $\sum f_n$ *converge normalement sur* I *alors elle converge uniformément sur* I*.*

2.2 Propriétés

Les propriétes sur les séries de fonctions découlent directement de celles sur les suites de fonctions appliquées à la suite des sommes partielles.

Théorème 2.1 (Continuité)**.** *Si* $\sum f_n$ *converge uniformément vers* f *sur* I *et si pour tout* n *la fonction* f_n *est continue en* $x_0 \in I$ *alors la fonction* f *est continue en* x_0*.*

Théorème 2.2 (Intégration)**.** *Si* $(f_n)_n$ *est une suite de fonctions continues par morceaux telle que la série* $\sum f_n$ *converge uniformément vers* f *sur un segement* $[a, b]$ *alors la fonction* f *est intégrable (au sens de Riemann) et on a*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) \, \mathrm{d}x \right).$$

Théorème 2.3 (Dérivation)**.** *Si* $(f_n)_n$ *est une suite de fonctions de classe* C^1 *sur* I *telle que la série* $\sum f_n'$ *converge uniformément vers* g *et il existe* $x_0 \in I$ *tel que* $\sum f_n(x_0)$ *converge, alors la série* $\sum f_n$ *converge vers une fonction* f*, uniformément sur tout intervalle borné* $J \subset I$*. De plus* f *est de classe* C^1 *sur* I *et* $f' = g$*.*