Agrégation interne
2016/2017
Mathématiques

Séries de Fourier

On ne considèrera que le cas des fonctions 2π-périodiques auquel on peut en fait toujours se ramener. En effet si f est T-périodique alors $g(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)$ est 2π-périodique.
Notation. Si $n \in \mathbb{Z}$ on notera e_n la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par $e_n(t) = \mathrm{e}^{int}$.
Notation. $C^0_{2\pi}$, resp. $C^1_{2\pi}$, désignera l'espace vectoriel des fonctions continues, resp. C^1, et 2π-périodiques.

1 Polynômes / séries trigonométriques. Coefficients de Fourier

Définition 1.1. *On appelle polynôme trigonométrique de degré au plus $N \in \mathbb{N}$, toute fonction de la forme $P = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$ où $c_n \in \mathbb{C}$, $n = -N, \dots, N$. On notera $\mathcal{P}_N$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré au plus N. C'est un sous-espace vectoriel de dimension $2N+1$ de $C^0_{2\pi}$.*

On appelle série trigonométrique toute série de fonction de la forme $c_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(c_n\mathrm{e}^{int} + c_{-n}\mathrm{e}^{-int}\right)$. Lorsqu'elle converge on notera $S(t) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\mathrm{e}^{int}$ la somme de la série.

Remarque 1.1. *L'ensemble des polynômes trigonométriques forme un sous-espace vectoriel de $C^0_{2\pi}$, et même de $C^1_{2\pi}$.*

Attention ! Même si on note $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\mathrm{e}^{int}$ la somme de la série, la convergence qui est considérée ici est celle de la suite $S_N(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n\mathrm{e}^{int}$ lorsque $N \to +\infty$ et non pas celle de $\displaystyle\sum_{n=-M}^{N} c_n\mathrm{e}^{int}$ lorsque N, M tendent vers $+\infty$.

Proposition 1.1. *Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ converge alors la série trigonométrique S converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue.*

Proposition 1.2. *L'application* $\langle f|g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t$ *définit un produit scalaire sur* $C^0_{2\pi}$. *Autrement dit* $C^0_{2\pi}$ *muni de la forme sesquilinéaire* $\langle\cdot|\cdot\rangle$ *est un espace préhilbertien complexe. On notera* $\|\cdot\|_2$ *la norme associée à ce produit scalaire.*

Remarque 1.2. *On peut remplacer l'intervalle* $[0,2\pi]$ *par n'importe quel intervalle de la forme* $[a,a+2\pi]$ *sans changer la valeur de l'intégrale.*

L'observation à la base de la théorie des séries de Fourier est que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une famille orthonormée pour ce produit scalaire (le facteur $\frac{1}{2\pi}$ est précisément fait pour que chaque e_n soit de norme 1). Si $f\in C^0_{2\pi}$, son projeté orthogonal sur le sous-espace $\mathcal{P}_N$ est alors donné par

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n,\quad c_n(f)=\langle e_n|f\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-int}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La définition des coefficients $c_n(f)$ ne nécessite pas que f soit continue, il suffit qu'elle soit continue par morceaux sur $[0,2\pi]$. On notera $C^0_{2\pi,m}$ l'ensemble des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux sur $[0,2\pi]$, et donc sur tout segment de $\mathbb{R}$. Par contre $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ne définit pas un produit scalaire sur $C^0_{2\pi,m}$ (il est positif mais pas défini positif).

Définition 1.2. *Si* $f\in C^0_{2\pi,m}$, *les coefficients de Fourier de* f *sont définis, pour* $n\in\mathbb{Z}$, *par* $c_n(f)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-int}f(t)\,\mathrm{d}t$. *La série de Fourier de* f *est la série*

$$c_0(f)+\sum_{n\geq 1}\left(c_n(f)e_n+c_{-n}(f)e_{-n}\right),$$

i.e. c'est la série trigonométrique dont les coefficients sont les coefficients de Fourier de f. *Lorsque la série converge on notera* $S(f)(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)\mathrm{e}^{int}$ *la somme de la série. La* N*-ème somme partielle de la série est notée* $S_N(f)(t)=\displaystyle\sum_{n=-N}^{N}c_n(f)\mathrm{e}^{int}$.

Remarque 1.3. *Si* f *est* T*-périodique on définit alors* $c_n(f)=\frac{1}{T}\int_0^T\mathrm{e}^{-in\omega t}f(t)\,\mathrm{d}t$ *où* $\omega=\frac{2\pi}{T}$. *La série de Fourier de* f *est alors définie par* $S(f)(t)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)\mathrm{e}^{i\omega nt}$. *Si* g *est la fonction* 2π*-périodique définie par* $g(t)=f\left(\frac{t}{\omega}\right)$ *on a* $c_n(g)=c_n(f)$ *et* $S(g)(t)=S(f)\left(\frac{t}{\omega}\right)$.

Lorsque la fonction f est à valeurs réelles on utilise aussi une écriture en sinus / cosinus plutôt qu'en exponentielles complexes. En écrivant $\mathrm{e}^{int}=\cos(nt)+i\sin(nt)$ et avec la parité des fonctions cosinus et sinus on obtient

$$S_N(f)(t)=c_0(f)+\sum_{n=1}^{N}a_n(f)\cos(nt)+b_n(f)\sin(nt),$$

où

$$a_n(f)=c_n(f)+c_{-n}(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt)f(t)\,\mathrm{d}t,\quad b_n(f)=ic_n(f)-ic_{-n}(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Définition 1.3. *Si $f \in C^0_{2\pi,m}$ on définit, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt)f(t)\,\mathrm{d}t, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nt)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La série de Fourier de f est la série

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right),$$

et la N-ème somme partielle est $\dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} (a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$.

Remarque 1.4. *Lorsque f est à valeurs réelles les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ le sont aussi, contrairement aux $c_n(f)$ en général. Par ailleurs, si f est paire alors les $b_n(f)$ sont nuls et si f est impaire alors les $a_n(f)$ sont nuls, cela se voit en remplaçant l'intervalle d'intégration par $[-\pi, \pi]$.*

Exemple 1.1. *Soit f la fonction impaire, 2π périodique, et qui vaut 1 sur $]0, \pi[$. On calcule alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{N}$),*

$$c_n(f) = \frac{1-(-1)^n}{in\pi} = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ est pair,} \\ \frac{2}{in\pi} & \textit{sinon,} \end{cases} \qquad a_n(f) = 0, \quad b_n(f) = 2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}.$$

On rappelle qu'une fonction f est dite C^1 par morceaux sur un segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$ telle que pour tout $k = 0, \ldots, n-1$ la fonction f est C^1 sur $]x_k, x_{k+1}[$ et prolongeable par continuité à $[x_k, x_{k+1}]$ en une fonction de classe C^1. Une fonction f est dite C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ si elle l'est sur tout segment. On notera $C^1_{2\pi,m}$ les fonctions C^1 par morceaux et 2π périodiques. Si $f \in C^1_{2\pi,m}$ et $x_0 < \cdots < x_n$ est une subdivision associée à l'intervalle $[0, 2\pi]$ on notera, avec un abus de notation, f' une fonction continue par morceaux et définie par $f'(t)$ si $t \neq x_k + 2m\pi$.

Proposition 1.3. *Si $f \in C^1_{2\pi,m}$ et continue alors $c_n(f') = inc_n(f)$. De même $a_n(f') = nb_n(f)$ et $b_n(f') = -na_n(f)$.*

Exemple 1.2. *Soit g la fonction 2π-périodique définie $g(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. La fonction g est continue et C^1 par morceaux. Sa dérivée g', là où elle est dérivable, est la fonction f de l'Exemple 1.1. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $c_n(f) = c_n(g') = inc_n(g)$ et donc, si $n \neq 0$, $c_n(g) = \dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$. Il reste à calculer $c_0(g) = \dfrac{\pi}{2}$. On trouve de même que $a_n(g) = 2\dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$ si $n \neq 0$, $a_0(g) = \pi$ et $b_n(g) = 0$.*

Proposition 1.4 (Meilleure approximation quadratique)**.** *Soit $f \in C^0_{2\pi,m}$. Alors pour tout entier N la somme partielle $S_N(f)$ est l'unique polynôme trigonométrique de degré au plus N qui réalise la meilleure approximation en moyenne quadratique de f sur $\mathcal{P}_N$. C'est-à-dire que pour tout $P \in \mathcal{P}_N$ on a*

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - S_N(f)(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} |f(t) - P(t)|^2 \,\mathrm{d}t \quad \iff \quad \|f - S_N(f)\|_2 \leq \|f - P\|_2,$$

avec égalité si et seulement si $P = S_N(f)$. De plus la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge et on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \|f\|_2^2. \qquad \textit{(Inégalité de Bessel)}$$

Corollaire 1.5 (Riemann-Lebesgue)**.** $\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f) = \lim_{n\to\infty} a_n(f) = \lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0.$

Remarque 1.5. *Si f est continue ces propriétés sont en fait un cas particulier de projection sur un sous-espace de dimension fini dans les espaces préhilbertiens. Si f est juste continue par morceaux on se ramène aussi à cette théorie générale en "régularisant" f (voir Remarque 2.6).*

2 Convergence de la série de Fourier

Théorème 2.1 (Weierstrass)**.** *Toute fonction $f \in C^0_{2\pi}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques.*

Remarque 2.1. *Le résultat ne peut pas être vrai si f est seulement continue par morceaux puisque les polynômes trigonométriques sont continus et qu'il y a convergence uniforme.*

Théorème 2.2 (Convergence en moyenne quadratique)**.** *Si $f \in C^0_{2\pi,m}$ alors $\lim_{N\to\infty} \|f - S_N(f)\|_2 = 0$.*

Théorème 2.3 (Parseval)**.** *Si $f \in C^0_{2\pi,m}$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge et on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

On a de même $$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Exemple 2.1. *On reprend les fonctions des Exemples 1.1 et 1.2. L'application du Théorème de Parseval donne respectivement*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2n+1)^2} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

et

$$\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2n+1)^4} = \frac{2\pi^2}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

En écrivant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

on en déduit que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *On trouve de même que* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Corollaire 2.4. *Si $f, g \in C^0_{2\pi,m}$ alors* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\,\mathrm{d}t = \langle f|g\rangle$.

Attention ! $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(\bar{f})$ et pas $\overline{c_n(f)} = c_n(\bar{f})$.

Corollaire 2.5. *Si f et g sont continues et ont les même coefficients de Fourier alors $f = g$.*

Remarque 2.2. *On en déduit que si f est continue et si les coefficients $a_n(f)$, resp. $b_n(f)$, sont tous nuls alors f est impaire, resp. paire. En effet, on montre alors que les coefficients de Fourier de la fonction $f(t)+f(-t)$, resp. $f(t)-f(-t)$, sont tous nuls et donc que $f(t)+f(-t) = 0$, resp. $f(t) - f(-t) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Les résultats suivants s'intéressent à la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier de f. Si $f \in C^0_{2\pi,m}$ et $t \in \mathbb{R}$ on notera $f(t_-) = \lim_{s\to t^-} f(s)$ et $f(t_+) = \lim_{s\to t^+} f(s)$. L'existence des limites est garantie par le fait que f est continue par morceaux, et là où f est continue on a simplement $f(t_-) = f(t_+) = f(t)$.

Théorème 2.6 (Dirichlet)**.** *Soit $f \in C^1_{2\pi,m}$. Alors la série de Fourier de f converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ et on a $S(f)(t) = \dfrac{f(t_-)+f(t_+)}{2}$. En particulier, $S(f)(t) = f(t)$ en tout point de continuité de f.*

Exemple 2.2. *On reprend la fonction f de l'Exemple 1.1. Elle est bien C^1 par morceaux et on a $S(f)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi}\sin((2n+1)t)$. Si on prend $t = \frac{\pi}{2}$ on en déduit que*

$$S(f)\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}.$$

Lorsque f est en plus continue, en combinant les Propositions 1.1 et 1.3, l'inégalité de Bessel (appliqué à f') et le corollaire 2.5 on montre qu'en fait

Proposition 2.7. *Si f est continue et C^1 par morceaux alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.*

Si la fonction f est seulement supposée continue, sans hypothèse de type C^1 par morceaux, le résultat n'est plus vrai. Il se peut que la série de Fourier diverge en certains points.

Exemple 2.3 (Contre-exemple de Féjer)**.** *Soit f la fonction 2π-périodique paire telle que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left((2^{n^3}+1)\frac{x}{2}\right)$. On montre facilement que f est bien définie et continue (convergence normale), on on peut montrer que la série de Fourier diverge en 0 (cf Gourdon, Analyse).*

Définition 2.1. *Pour $N \in \mathbb{N}^*$ on note $T_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$, appelées sommes de Féjer.*

Théorème 2.8 (Féjer)**.** *Si $f \in C^0_{2\pi,m}$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a* $\lim_{N\to\infty} T_N(f)(t) = \dfrac{f(t_-) + f(t_+)}{2}$. *De plus si f est continue sur un intervalle I alors la convergence est uniforme (vers f) sur tout segment inclus dans I. En particulier si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 2.3. *Si f est continue, pour tout N la somme de Féjer est un polynôme trigonométrique. On retrouve ainsi le résultat du théorème de Weierstrass.*

Remarque 2.4. *Les polynômes trigonométriques étant continus on ne peut bien sur avoir convergence uniforme vers f que là où f est continue.*

Remarque 2.5. *Si $f \in C^0_{2\pi,m}$ on définit la régularisée $\tilde{f}$ de f par $\tilde{f}(t) = f(t)$ là où f est continue et $\tilde{f}(t) = \dfrac{f(t_-) + f(t_+)}{2}$ sinon. La fonction $\tilde{f}$ ne diffère de f sur $[0, 2\pi]$ qu'en un nombre fini de points. Elle a donc (au moins) la même régularité que f, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $c_n(\tilde{f}) = c_n(f)$ et les théorèmes de Dirichlet et Féjer assurent la convergence des séries de Fourier, ou des sommes de Féjer, vers $\tilde{f}$.*

Remarque 2.6. *L'ensemble D des fonctions 2π-périodiques, continues par morceaux et telles qu'en tout point de discontinuité on ait $\tilde{f}(t) = \dfrac{f(t_-) + f(t_+)}{2}$, est un espace vectoriel, appelé espace de Dirichlet sur lequel l'application $\langle f|g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire. Les résultats de la Proposition 1.4 pour les fonctions dans D découlent alors, comme pour les fonctions continues, de la théorie générale des espaces préhilbertiens. Que ces résultats soient vrais pour une fonction $f \in C^0_{2\pi,m}$ quelconque provient du fait qu'aucune des quantités apparaissant dans la Proposition ne change quand on remplace une fonction $f \in C^0_{2\pi,m}$ par sa régularisée $\tilde{f} \in D$.*