Agrégation interne
2016/2017
Mathématiques

Séries entières

1 Rayon et disque de convergence

Définition 1.1. *On appelle série entière toute série de fonctions de la forme* $\sum a_n z^n$ *où* z *est une variable complexe et* $(a_n)_n$ *une suite de nombres complexes.*

Définition 1.2. *On appelle rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *le nombre (éventuellement infini)*

$$R := \sup\{r \geq 0 \,|\, \textit{la suite } (a_n r^n)_n \textit{ est bornée}\}.$$

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < R\}$ *est appelé disque de convergence de la série entière.*

La terminologie rayon de convergence est justifiée par le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Soit* R *le rayon de convergence de la série* $\sum a_n z^n$.

1. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < R$ *la série* $\sum a_n z^n$ *est absolument convergente.*
2. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| > R$ *la série* $\sum a_n z^n$ *est divergente.*

Le domaine de convergence de la série entière est donc essentiellement déterminé par son rayon de convergence. Cependant le théorème précédent ne dit rien sur la convergence de la série lorsque $|z| = R$.

Les critères suivants permettent de calculer le rayon de convergence.

Proposition 1.2 (Règle de D'Alembert)**.** *On suppose que* $a_n \neq 0$ *pour* n *assez grand. Si* $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ *(éventuellement* $\ell = +\infty$*) alors le rayon de convergence de la série* $\sum a_n z^n$ *est* $R = \frac{1}{\ell}$*, avec la convention* $R = 0$ *si* $\ell = +\infty$ *et* $R = +\infty$ *si* $\ell = 0$.

Proposition 1.3 (Règle de Cauchy)**.** *Si* $\lim |a_n|^{1/n} = \ell$ *(éventuellement* $\ell = +\infty$*) alors le rayon de convergence de la série* $\sum a_n z^n$ *est* $R = \frac{1}{\ell}$*, avec les mêmes conventions que ci-dessus.*

Remarque 1.1. *Dans la règle de Cauchy on peut remplace* $\lim$ *par* $\limsup$. *Cette dernière a l'avantage de toujours exister contrairement à la limite.*

Remarque 1.2. *Ces règles sont souvent utilisées dans la pratique. Il est cependant parfois plus simple de revenir à la définition du rayon de convergence. Par exemple, la série* $\sum_n z^{n^2}$ *a pour rayon de convergence* 1. *Notez qu'ici la suite* a_n *est définie par* $a_n = 1$ *si* n *est un carré et* $a_n = 0$ *sinon, on ne pourra donc même pas essayer d'appliquer la règle de D'Alembert.*

Proposition 1.4. *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *de rayons de convergence respectifs* R_a *et* R_b. *On note* f *et* g *les sommes de ces séries sur leur disque de convergence respectif.*

- *Le rayon de convergence* R *de la série entière* $\sum (a_n + b_n) z^n$ *vérifie* $R \geq \min\{R_a, R_b\}$ *et sur le disque de rayon* $\min\{R_a, R_b\}$ *on a* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = f(z) + g(z)$.
- *Si* $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, *le rayon de convergence* R' *de la série entière* $\sum c_n z^n$ *vérifie* $R' \geq \min\{R_a, R_b\}$ *et sur le disque de rayon* $\min\{R_a, R_b\}$ *on a* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z) \times g(z)$.

2 Propriétés de la somme

Proposition 2.1. *Pour tout* $r < R$ *la série* $\sum a_n z^n$ *converge normalement sur* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$. *Par conséquent la fonction* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *est continue sur le disque de convergence.*

Proposition 2.2. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R.

1. *Les séries entières* $\sum z a_n z^{n-1}$ *et* $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ *ont pour rayon de convergence* R.
2. *La fonction* f *définie sur* $]-R, R[$ *par* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *est de classe* C^1 *et pour tout* $x \in]-R, R[$ *on a*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \qquad \text{et} \qquad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

3. *Pour* z *dans le disque de convergence on note* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Pour tout* z_0 *dans le disque de convergence, la limite* $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ *existe et vaut* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_0^{n-1}$.

Corollaire 2.3. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *La fonction* f *définie sur* $]-R, R[$ *par* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *est de classe* C^∞. *Par ailleurs on a* $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 2.4. *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence* R_a *et* R_b. *Si les fonctions* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *et* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *coincident dans un voisinage de* 0 *alors* $a_n = b_n$ *pour tout* n.

Théorème 2.5 (Convergence radiale d'Abel)**.** *Soient* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R *et* $z_0 = R\mathrm{e}^{i\theta}$ *sur le cercle de convergence tel que la série* $\sum a_n z_0^n$ *converge. Alors la fonction* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x\mathrm{e}^{i\theta})^n$ *converge uniformément sur* $[0, R]$. *En particulier elle est continue en* $x = R$.

Exemple 2.1. *La série entière* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ *a pour rayon de convergence* 1 *et sa somme est* $\ln(1+x)$. *Par ailleurs, la série converge pour* $x = 1$ *(série alternée). On en déduit que* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln(2)$.

Attention ! La réciproque est fausse. Ce n'est pas parce que la somme $f(x\mathrm{e}^{i\theta})$ de la série entière a une limite lorsque x tend vers R que la série converge en $R\mathrm{e}^{i\theta}$. Par exemple, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ a pour rayon de convergence 1 et sa somme vaut $\frac{1}{1-x}$ qui admet une limite lorsque $x \to -1$. Cependant la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ diverge.

Séries génératrices, application à des problèmes de dénombrement et probabilités : voir Exercices.

3 Développement en série entière

Définition 3.1. *Une fonction d'une variable réelle* f, *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *définie au voisinage de* 0 *est dite développable en série entière, en abrégé DSE, (au voisinage de* 0*) s'il existe* $R > 0$ *tel que, sur* $]-R, R[$, f *coincide avec la somme d'une série entière de rayon supérieur ou égal à* R.

Définition 3.2. *Une fonction d'une variable réelle* f, *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *définie au voisinage de* x_0 *est dite développable en série entière au voisinage de* x_0 *si la fonction* $g(x) = f(x + x_0)$ *est développable en série entière au voisinage de* 0. *Si* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *on écrit alors* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Remarque 3.1. *Si f est DSE au voisinage de x_0, nécessairement f est de classe C^∞ au voisinage de x_0 et les coefficients a_n de la série entière sont donnés par $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.*

Remarque 3.2. *La série $\sum \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ est appelée série de Taylor de f au voisinage de x_0. Même si f est C^∞ elle peut avoir un rayon de convergence nul. Elle peut aussi avoir un rayon de convergence non nul, voir infini, et ne coincider avec f sur aucun voisinage de x_0. C'est par exemple le cas si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$ si $x > 0$ (on a alors $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n).*

Proposition 3.1. *Si f et g sont deux fonctions DSE et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors les fonctions f', $f+g$, fg et λf sont DSE. Si de plus $g(0) = 0$ alors $f \circ g$ est DSE.*

On donne ci-dessous quelques DSE usuels.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$,
- $\forall x \in]-1,1[$, $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
- $\forall x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, (cas particulier $\alpha = -1$),
- $\forall x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

Application à la résolution d'équations différentielles : voir Exercices.