Agrégation interne
2016/2017
Mathématiques

Intégrales à paramètres / Fonctions définies par une intégrale

Dans le cadre de l'agrégation interne l'intégrale est définie au sens de Riemann.

1 Intégrales définies sur un segment

Dans cette section f note une fonction définie sur $I \times [a,b]$, où I est un intervalle, et à valeurs complexes. On suppose que pour tout $x \in I$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux, ce qui permet de définir $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 1.1. *Si f est continue sur $I \times [a,b]$ alors F est continue sur I.*

Attention ! Ici on requiert la continuité à deux variables.

Remarque 1.1. *On a le même résultat si f est une fonction définie sur $\Omega \times [a,b]$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans un espace de Banach E.*

Théorème 1.2. *Si f admet une dérivée partielle par rapport à x sur $I \times [a,b]$ et si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times [a,b]$ alors F est dérivable, et même C^1 sur I et on a $F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.*

Remarque 1.2. *Si f est une fonction définie sur $\Omega \times [a,b]$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ on a un résultat similaire en remplaçant "f a dérivée partielle par rapport à x" par "f admet une différentielle partielle par rapport à x" et on obtient alors que F est différentiable.*

En utilisant la version "différentiable" avec $F(x,u,v) = \displaystyle\int_u^v f(x,t)\,\mathrm{d}t$ et en considérant $G(x) = F(x,u(x),v(x))$ on obtient :

Corollaire 1.3. *Si f est continue et admet une dérivée partielle par rapport à x qui est continue, et si $u, v : J \to [a,b]$ sont dérivables alors la fonction $G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et*

$$G'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t + v'(x)f(x,v(x)) - u'(x)f(x,u(x)).$$

2 Intégrales définies sur un intervalle

On se place maintenant dans le cas où $f : I \times J \to \mathbb{C}$ avec I et J deux intervalles. On rappelle qu'une fonction définie sur un intervalle J est dite continue par morceaux si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans J.

Théorème 2.1. *On suppose que*

- *pour tout $x \in I$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J,*
- *pour tout $t \in J$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I,*
- *il existe $g : J \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f(x,t)| \le g(t)$ pour tout $(x,t) \in I \times J$ (hypothèse de domination).*

Alors la fonction $F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie sur I et elle est continue.

Remarque 2.1. *A nouveau on a le même résultat si f est une fonction définie sur $\Omega \times J$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans un espace de Banach E.*

Remarque 2.2. *Ce théorème s'obtient par application du Théorème de convergence dominée (on a d'ailleurs des hypothèses totalement similaires). En effet, pour montrer que F est continue en $x \in I$ il suffit de montrer que pour toute suite $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim x_n = x$ on a $\lim F(x_n) = F(x)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $f_n(t) = f(x_n,t)$ et d'utiliser la continuité de $x \mapsto f(x,t)$ pour avoir la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$.*

Dans la pratique on est parfois amené à diminuer l'intervalle I pour pouvoir montrer l'hypothèse de domination. On pourra utiliser le résultat suivant

Corollaire 2.2. *On suppose que*

- *pour tout $x \in I$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J,*
- *pour tout $t \in J$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I,*
- *pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I il existe $g : J \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f(x,t)| \le g(t)$ pour tout $(x,t) \in [a,b] \times J$ (hypothèse de domination).*

Alors la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie sur I et elle est continue.

En effet, si $[a,b] \subset I$ le théorème ci-dessus permet d'affirmer que F est continue sur $[a,b]$. Comme c'est valable pour tout segment inclus dans I on en déduit la continuité sur I (la continuité est une propriété locale).

Le théorème 1.1, que l'on peut montrer directement, est en fait une conséquence du corollaire ci-dessus. En effet, si J est un segment, pour tout $[a,b] \subset I$ l'ensemble $[a,b] \times J$ est un compact et comme f est supposée continue elle est donc bornée, sur $[a,b] \times J$. On peut donc appliquer le corollaire avec comme fonction g une fonction constante, qui est bien intégrable puisque J est un segment.

Remarque 2.3. *Si on a une fonction définie sur $\Omega \times J$, avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il faut remplacer "pour tout segment inclus dans I" par "pour tout compact K inclus dans Ω".*

Théorème 2.3. *Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$ telle que*

- *pour tout $x \in I$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J,*
- *f admet une dérivée partielle par rapport à x sur $I \times J$ et pour tout $t \in J$ la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I,*
- *il existe $g : J \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$ pour tout $(x,t) \in I \times J$ (hypothèse de domination).*

Alors la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable, et même C^1 sur I et on a $F'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque 2.4. *Tout comme pour le théorème on peut remplacer l'hypothèse de domination sur $I \times J$ par une hypothèse de domination sur $[a,b] \times J$ pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I.*

3 Intégrales impropres

On suppose ici que f est définie sur $I \times [a,b[$ (on traiterait de même le cas $I \times]a,b]$). Si f est intégrable, dans le sens où $\displaystyle\int_a^b |f(x,t)|\,\mathrm{d}t$ converge, on peut utiliser les résultats de la section précédente (type convergence dominée). Il arrive cependant que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge, c'est-à-dire que $\displaystyle\lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge, mais que f ne soit pas intégrable. On a alors le résultat suivant.

Théorème 3.1. *Soit $f : I \times [a,b[\to \mathbb{C}$ continue (en tant que fonction de deux variables) telle que $\displaystyle\int_a^y f(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge vers $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ uniformément par rapport à $x \in I$. Alors F est continue.*

Ce théorème s'obtient en combinant le Théorème 1.1 et celui sur la convergence uniforme de suites de fonctions continues. En effet, si $(y_n)_n$ est une suite telle que $\lim y_n = b$ alors d'après le Théorème 1.1 les fonctions $F_n(x) = \displaystyle\int_a^{y_n} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ sont continues et par hypothèse elles convergent uniformément vers $F(x)$.

Remarque 3.1. *Comme précédemment il suffit de montrer la convergence uniforme sur tout segment inclus dans I, et on a un résultat similaire si $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

Remarque 3.2. *Ce théorème permet de traiter le cas d'intégrales semi-convergentes. Cependant il nécessite d'avoir f continue à deux variables et non plus en x et en t séparément, et surtout il faut montrer que la convergence de l'intégrale est uniforme par rapport à x.*

Concernant la dérivabilité on montre de façon similaire, en utilisant le Théorème 1.2 et celui sur la dérivabilité des suites de fonctions, le résultat suivant.

Théorème 3.2. *Soit $f : I \times [a,b[\to \mathbb{C}$. On suppose que*

- *pour tout $x \in I$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux,*
- *il existe $x_0 \in I$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x_0,t)\,\mathrm{d}t$ converge,*
- *pour tout $(x,t) \in I \times [a,b[$ la fonction f admet une dérivée partielle par rapport à x et la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times [a,b[$,*
- $\displaystyle\int_a^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ *converge vers* $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ *uniformément par rapport à $x \in I$.*

Alors, pour tout $x \in I$ l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge. La fonction F est dérivable (et même C^1) sur I et on a $F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.