Agrégation interne
2016/2017

# Intégration - Primitives - Calcul d'intégrales

**Exercice 1 :** (Monier Ed. 2000 p.129) Dans chacun des exemples suivants, montrer que la suite, dont on donne le terme général $u_n$ converge et calculer la limite.

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$
2. $\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$
3. $\sum_{k=0}^{n} (n+k)^{-\alpha}(n+k+1)^{-\beta}$, $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\alpha+\beta=1$
4. $\sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n})\sin(\frac{k}{n^2})$

**Exercice 2 :** (Auliac - Caby p.229) Soit $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ et $F$ une primitive de $f$ sur $[0,1]$.

1. Soient $k, n$ entiers tels que $0 \leq k < n$. Prouver qu'il existe un nombre réel $c_{n,k} \in ]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ tel que
$$F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) + \frac{1}{2n^2} f'(c_{n,k})$$
2. Donner $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'(c_{n,k})$. En déduire le nombre $A$ qui vérifie
$$\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \frac{A}{n} + o(\frac{1}{n}), \quad n \to +\infty$$
3. Démontrer de même que
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{A}{n} + o(\frac{1}{n}), \quad n \to +\infty$$

**Exercice 3 :** (Monier 2000 p.140)

1. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer : $\varphi\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 \varphi \circ f$.
2. (a) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive. Montrer : $\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln \circ f \leq \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)$.
   (b) Calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1}\int_1^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx$.

**Exercice 4 :** (Auliac - Caby p.231) Etant donné deux nombres réels $a$ et $b$ tels que $0 < a < b$, montrer que : $\int_a^b \frac{dt}{t} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

**Exercice 5 :** (Monier ed.2000 p.142) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$. Montrer $\int_a^b (f(x)-f(a))^2\,dx \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2\,dx$.

**Exercice 6 :** (Kaczor - Nowak p.43) Prouver que si $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, alors $\left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx$.

**Exercice 7 :** (Auliac - Caby p.234) Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt$. Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ est-elle définie ?
Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$.

**Exercice 8 :** (Auliac - Caby p.227) Soit $f$ une fonction réelle de classe $C^1$ sur $[a,b]$, dont la dérivée est de signe constant et $g$ une fonction réelle continue sur ce segment. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt + f(b)\int_c^b g(t)\,dt$

**Exercice 9 :** (Kaczor - Nowak p.44) Prouver que si $f$ est une fonction continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ telle que $f(0)=0$ et $0<f'(x)\leq 1$ sur $]0,1[$, alors $\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \geq \int_0^1 (f(x))^3\,dx$. Montrer que l'égalité est atteinte si et seulement si $f(x)=x$.

**Exercice 10 :** (Kaczor - Nowak p.44) Déterminer

$$\min_{f\in\mathcal{A}} \int_0^1 (1+x^2) f^2(x)\,dx$$

où

$$\mathcal{A} = \left\{ f \in \mathcal{C}_{[0,1]} : \int_0^1 f(x)\,dx = 1 \right\}$$

**Exercice 11 :** (Kaczor - Nowak p.23) Calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(n^4 \int_n^{n+1} \frac{x}{x^5+1}\,dx\right)$.

**Exercice 12 :** (Monier ed.2000 p.135) Soient $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, telle que $f\geq 0$, et $(a,b,T)\in \mathbb{R}\times[0,+\infty[^2$.
On suppose : $\forall t\in[0,T],\ f(t)\leq a + b\int_0^t f(x)\,dx$. Montrer $\forall t\in[0,T],\ f(t)\leq ae^{bt}$.

**Exercice 13 :** (Dantzer p.207) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

1. Ecrire, pour tout entier $n\geq 2$, une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n-2}$.
2. Donner une expression explicite de $I_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$.
4. En déduire la formule de Wallis : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}\right]^2 = \pi$.
5. Montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

**Exercice 14 :** (Monier ed.2006 p.234) Montrer $\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x e^t \ln t\,dt}{e^x \ln x} = 1$.

**Exercice 15 :** (Auliac - Caby p.253) On pose pour $n\in\mathbb{N}^*$, $A_n = \int_0^1 \frac{dt}{(t^3+1)^n}$

1. Calculer $A_1$.
2. Donner une relation de récurrence entre $A_n$ et $A_{n+1}$

**Exercice 16 :** (Auliac - Caby livre de cours p.328) Calculer $I_n = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, où $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{R}$.

**Exercice 17 :** (Kaczor - Nowak p.20) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, utiliser l'intégrale $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$ pour calculer $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2k+1}\binom{n}{k}$

**Exercice 18 :** (Auliac - Caby p.249)

1. Pour $f$ continue par morceaux sur $[a,b]$, comparer $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b f(a+b-t)\,dt$.
2. Trouver les valeurs des intégrales $\int_{-1}^1 \frac{\ln(1+|t|)}{1+t^2}\,dt$ et $\int_0^{\ln 2} \frac{t}{2\mathrm{ch}t+\mathrm{e}^{-t}-2}\,dt$.

**Exercice 19 :** (Auliac - Caby p.251) Calculer, dans chacun des cas suivants, les intégrales indéfinies, en utilisant le changement de variable indiqué (on précisera un intervalle sur lequel le calcul est effectué).

1. $\int \frac{dt}{\sqrt[3]{4t^2+4t+1}-\sqrt{2t+1}}$ avec $2t+1=x^6$.
2. $\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^3+1}}$ avec $1+t^3=x^3t^3$.

**Exercice 20 :** (Auliac - Caby p.255) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Calculer $I(\alpha)=\int_0^\alpha \arctan(\sqrt[3]{t})\,dt$.

**Exercice 21 :** (Monier ed.2000 p.196) Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :
$a)\ \frac{x+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x^2-1}$, $\quad b)\ \frac{1}{sh^4 x ch x}$, $\quad c)\ \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}$

**Exercice 22 :** (Auliac - Caby p.248) Calculer intégrales suivantes :
$I_1 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^3 t}{1-2\sin t}\, dt$, $\quad I_2 = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin t + \sin^3 t}{\cos 2t}\, dt$, $\quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{3\cos t + 4\sin t + 5}$.

**Exercice 23 :** (Kaczor - Nowak p.19-20) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

**Exercice 24 :** (Auliac - Caby p.263) Pour $a > 0$, calculer l'intégrale $\int_1^a \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\, dt$ par le changement de variable $x = \sqrt{1+t^2}$. Quel autre changement de variable pouvait-on utiliser ?

**Exercice 25 :** (Gourdon p.145) Donner une relation de récurrence permettant de calculer les intégrales suivantes :
$a)\ I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t\, dt$, $\quad b)\ I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^n t}\, dt$, $\quad c)\ I_n = \int_1^e \ln^n t\, dt$.

**Exercice 26 :** (Irrationnalité de $\pi^2$, Gourdon p.184) Soit $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$

1. Calculer $f_n^{(k)}(0)$ et $f_n^{(k)}(1)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Supposons que $\pi^2 = \frac{q}{p}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. On note $I_n = \pi q^n \int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x)\, dx, n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer également $0 < I_n < \frac{2q^n}{n!}$ et en déduire une contradiction.

**Exercice 27 :** (Monier ed. 2000 p. 128) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Montrer
$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n\, dx\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

**Exercice 28 :** (Kaczor - Nowak p.21) Pout $f$ continue sur $[a,b]$, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)\, dx$, $\quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\, dx$
2. $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin^2(nx)\, dx$

**Exercice 29 :** (Auliac - Caby p.243) Soit $f$ continue sur $[0,1]$ et $a \in ]0,1[$.

1. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^a f(t^n)\, dt = af(0)$.
2. Prouver que $\left|\int_0^1 f(t^n)\, dt - f(0)\right| \leq \left|\int_0^a f(t^n) - af(0)\right| + 2(1-a)\|f\|_\infty$
3. Si $\|f\|_\infty \neq 0$, on pose, pour tout $\epsilon \in ]0, \|f\|_\infty[$, $a = 1 - \frac{\epsilon}{4\|f\|_\infty}$. Prouver qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\int_0^a f(t^n) - af(0)\right| < \frac{\epsilon}{2}$, pour $n \geq n_0$. Conclure.

**Bibliographie** :

- G. Auliac et J.Y. Caby : Exercices corrigés d'Analyse pour le Capes et l'Agrégation interne
- G. Auliac et J.Y. Caby : Analyse pour le Capes et l'Agrégation interne
- J.M. Monier : Analyse MPSI Editions 2000 et 2006
- J.F Dantzer : Mathématiques pour l'agrégation interne : Analyse et Probabilités
- X.Gourdon : Les Mathématiques en tête Analyse
- W.J. Kaczor et M.T. Nowak (Traduction E. Kouris) : Problèmes d'Analyse III - Intégration - Exercices corrigés - EDP Sciences.