Agrégation interne
2016/2017
Mathématiques

Suites et séries de fonctions.

Exercice 1. Étudier la convergence simple, puis uniforme, des suites de fonctions $(f_n)_n$ sur l'intervalle I.

a) $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n}$, $I = \mathbb{R}$.

b) $f_n(x) = x\mathrm{e}^{\frac{x}{n}},\ I = [0,+\infty[$.

c) $f_n(x) = \ln\left(x+\dfrac{1}{n}\right),\ I =]0,+\infty[$.

d) $f_n(x) = x^n,\ I = [0,a],\ 0 \leq a < 1$, puis $I = [0,1[$.

e) $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n,\ I = [0,1],\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$ si $x \leq n$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

a) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement et déterminer sa limite.

b) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3 (non interversion limite intégrale)**.** Soit f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = n\cos^n(x)\sin(x)$.

a) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement et déterminer sa limite f.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5. Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynômes. On suppose que cette suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ la fonction polynôme $P_n - P_N$ est constante.

b) En déduire que f est une fonction polynôme.

Remarque : il est important ici d'avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, ou du moins sur un intervalle non-borné. Le théorème de Weierstrass affirme en effet que toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Exercice 6. Étudier la convergence (simple, normale, uniforme) des séries de fonctions de terme général f_n sur l'intervalle I ($I = \mathbb{R}$ lorsque ce n'est pas précisé).

a) $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$, $I = \mathbb{R}_+$.

b) $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2}$.

c) $f_n(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x = n$, $f_n(x) = 0$ sinon.

d) $f_n(x) = \dfrac{nx}{3n^4+x^4}$.

Exercice 7. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^2}$.

a) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement, on note f sa somme, et étudier la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$.

b) Soit $\widetilde{R}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x)$. En minorant $\widetilde{R}_n(n)$, étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que pour tout $a > 0$ la série $\displaystyle\sum f_n$ converge normalement sur $[0, a]$ et en déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

d) Montrer que la série $\sum(-1)^n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ mais que la convergence n'est pas normale.

Exercice 8. Pour tout $n \geq 1$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1 + nx^2)}$.

a) Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$. On note S la somme de cette série.

b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que S est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, puis que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $x > 1$, on ait $S(x) \leq \dfrac{K}{x}$. En déduire la limite de S en $+\infty$.

e) Que vaut $\lim\limits_{x \to 0^+} S(x)$?

f) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} S(x)/x = +\infty$. *(On pourra commencer par donner la limite de* $T_N(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ *en* 0^+*).* Que peut on en déduire pour le graphe de S ? La fonction S est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9 (Fonction ζ de Riemann)**.** On considère la série de fonctions $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$.

a) Montrer que la série converge si et seulement si $x > 1$. On considèrera par la suite la fonction ζ définie sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $a > 1$ la série converge uniformément sur $[a, +\infty[$. En déduire que la fonction ζ est continue sur I.

c) Montrer que pour tout $n \geq 1$ la fonction $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ est de classe C^∞ et calculer $f_n^{(k)}(x)$ pour $k \geq 1$. En déduire que la fonction ζ est de classe C^∞.

d) Montrer que la fonction ζ est strictement décroissante et strictement convexe sur I.

e) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x)$ et montrer que $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ lorsque x tend vers 1. On pourra utiliser une comparaison série / intégrale.