Agrégation interne
2016/2017
Mathématiques

Séries de Fourier.

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \cos(\alpha x)$ sur $[-\pi, \pi[$. Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de la fonction f. On distinguera deux cas, selon que α est ou non un entier relatif.

Exercice 2. Déterminer une suite de réels $(a_n)_n$ telle que $\forall x \in [0, \pi[, \sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$.

Exercice 3. Soit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{int}$ une série trigonométrique qui converge sur $\mathbb{R}$ et f sa somme. Montrer que si la convergence est uniforme alors f est continue et égale à sa série de Fourier.

Exercice 4. Soit f 2π-périodique telle que $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi[$.
a) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.
b) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
c) Soit g la fonction 2π périodique définie pour $x \in [-\pi, \pi[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^x \left(f(t) - \frac{\pi^2}{3}\right) \mathrm{d}t$. Déterminer un développement en série trigonométrique de g. Cette série est-elle la série de Fourier de g ?
d) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 5. Soient $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \mathrm{e}^{i\alpha x}$ sur $]-\pi, \pi]$.
a) Déterminer la série de Fourier complexe de f. On note S sa somme de cette série.
b) En calculant $S(0)$ et $S(\pi)$ montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\pi}{2\alpha \sin(\alpha\pi)} - \frac{1}{2\alpha^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = \pi \mathrm{cotan}(\alpha\pi), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Exercice 6 (Inégalité de Wirtinger)**.** Soit f une fonction 2π-périodique continue et C^1 par morceaux telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t,$$

et étudier le cas où on a l'égalité.

Exercice 7. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y = |\sin t|$.
a) Ecrire la fonction $t \mapsto |\sin t|$ comme somme d'une série trigonométrique.
b) Résoudre pour $n \in \mathbb{N}$ l'équation différentielle $y''(t) + 4y(t) = \cos(nt)$.
c) Déduire des deux questions précédentes une solution particulière de (E), puis sa solution générale.

Exercice 8. Soit $a > 0$, soit $f(t)$ l'application définie par

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2 + a^2}.$$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et 2π-périodique.
b) Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique h définie par

$$\forall t \in [-\pi, \pi],\ h(t) = f(t) - t^2/4$$

(on pourra utiliser les résultats des exercices 3 et 4). Montrer que h est une fonction C^2 sur $\mathbb{R}$.
c) Exprimer h'' en fonction de f. Montrer que f est C^2 sur $]-\pi, \pi[$ puis déterminer une équation différentielle vérifiée par f sur cet intervalle.
d) En déduire une expression de $f(t)$. (Utiliser le résultat de l'exercice 5 pour calculer $f(0)$.)

Exercice 9 (Théorème ergodique)**.** Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et si $\alpha \in \mathbb{R}$ soit $R_\alpha : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ la rotation d'angle α, i.e. $R_\alpha(z) = \mathrm{e}^{i\alpha} z$. Etant donné $z_0 \in \mathbb{U}$ on considère la suite définie par récurrence par $z_{k+1} = z_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$.
a) Montrer que si P est un polynôme trigonométrique on a $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} P(\theta + \alpha k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
b) Montrer que pour toute fonction continue $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ et tout $z_0 \in \mathbb{U}$ on a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(z_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{it}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Indication : on pourra considérer la fonction continue 2π-périodique $g(t) = f(\mathrm{e}^{it})$ et utiliser le Théorème de Weierstrass.

c) Si $\alpha = 2\pi \dfrac{p}{q} \in 2\pi\mathbb{Q}$ avec p et q premiers entre eux déterminer $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(z_k)$.