Agrégation interne
2016/2017
Mathématiques

Séries entières

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

a) $\sum (\ln n)^2 z^n$. **c)** $\sum n^n z^n$. **e)** $\sum \frac{z^{2n}}{2-\sin(n)}$. **g)** $\sum \frac{\ln(\sqrt{n}+1)}{\ln(\sqrt{n}-1)} z^n$.

b) $\sum \frac{n^2+n}{3^n} z^n$. **d)** $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$. **f)** $\sum z^{n^2}$. **h)** $\sum (\mathrm{e}^{\sqrt{n+1}} - \mathrm{e}^{\sqrt{n}}) z^n$.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence ainsi que la somme des séries entières suivantes.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n = 3^n$ si n est pair et $a_n = 2^{-n}$ sinon.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$.

e) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^{2n}$.

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. On cherche les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 0. \tag{E}$$

Soit $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une telle solution.

a) Trouver une relation de récurrence entre les a_n.

b) Montrer que a_n est nul si n est impair, et donner une expression simple des a_{2k}, $k \in \mathbb{N}$. En déduire le rayon de convergence de la série entière.

c) Déduire de la question précédente que (**??**) admet bien des solutions développables en séries entières et expliciter ces solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 4. On note S_n le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. On dit que $\sigma \in S_n$ est un dérangement si $\sigma(k) \neq k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, autrement dit si σ ne possède aucun point fixe, et on note d_n le nombre de dérangement de S_n avec la convention $d_0 = 1$. On considère la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d_n}{n!} x^n$.

a) Montrer que le rayon de convergence R de la série vérifie $R \geq 1$. Pour x dans le disque ouvert de convergence on note $f(x)$ la somme de la série.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$. En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$

$$f(x)\mathrm{e}^x = \frac{1}{1-x}.$$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\left|\dfrac{1}{\mathrm{e}} - \dfrac{d_n}{n!}\right| < \dfrac{1}{(n+1)!}$ puis que $d_n = E\left(\dfrac{n!}{e} + \dfrac{1}{2}\right)$ où E désigne la partie entière. Quelle est la valeur du rayon de convergence R de la série entière ?

Référence : Dantzer + Francinou (Algèbre, Tome 1).

Exercice 5. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on note $p_k = P(X = k)$ et on considère la série entière $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k t^k$. Elle est appelée série génératrice de la variable X.

a) Montrer que le rayon de convergence R de la série vérifie $R \geq 1$. On notera par la suite $G_X(t)$ la somme de la série lorsqu'elle converge. Montrer que G_X est continue au moins sur $[-1, 1]$ et qu'elle caractérise la loi de X, i.e. si X et Y sont deux variables aléatoires telles que $G_X = G_Y$ alors X et Y suivent la même loi.

b) Calculer G_X, en précisant le rayon de convergence, lorsque X suit une loi de Bernoulli, binomiale, géométrique ou de Poisson.

c) i) Soit $\sum a_k t^k$ une série entière de rayon de convergence R, de somme $f(t)$ et telle que $a_k \geq 0$ pour tout k. Montrer que $\displaystyle\lim_{t \to R^-} f(t)$ existe ssi $\sum a_k R^k$ converge et qu'on a alors

$$\lim_{t \to R^-} f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k.$$

ii) Montrer que X admet une espérance ssi $\displaystyle\lim_{t \to 1^-} G'_X(t)$ existe dans $\mathbb{R}$ et qu'alors la limite vaut $E(X)$.

iii) Montrer que X admet une variance ssi $\displaystyle\lim_{t \to 1^-} G''_X(t)$ existe dans $\mathbb{R}$ et qu'alors la limite vaut $E(X^2) - E(X)$.

d) Retrouver l'espérance et la variance de X lorsque X suit une loi de Bernoulli, binomiale, géométrique ou de Poisson.

e) Soient X, Y deux variable aléatoires indépendantes telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, et G_X, G_Y leur série génétratrice respective. Montrer que $G_{X+Y} = G_X G_Y$. Application : si X et Y sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, quelle est la loi de la variable $X + Y$?