Agrégation interne
2016/2017
Mathématiques

Calcul différentiel

Exercice 1. Soit $\ell^1 = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_n |x_n| \text{ converge} \right\}$. On pose

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \quad \|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|.$$

a) Vérifier que ℓ^1 est un espace vectoriel.
b) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ définissent deux normes sur ℓ^1 et qu'elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) \text{ si } y \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x,0) = 0.$$

Déterminer le domaine où la fonction f est continue, différentiable, de classe C^1, deux fois différentiables, de classe C^2. Calculer ses derivées partielles croisées d'ordre 2 en $(0,0)$ et commenter le résultat du point de vue du théorème de Schwarz.

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x^4y^2 \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} f(0,0) = 0.$$

a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer que les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et calculer leurs valeurs. Que peut on en déduire pour f ?
N.B. : Cet exemple est du à Peano. Ref : par exemple, Gourdon - Analyse

Exercice 4. Le but de l'exercice est de calculer la norme d'un endomorphisme $f \in L(\mathbb{R}^n)$ pour certains choix de norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in L(\mathbb{R}^n)$ et $A = (a_{ij})_{i,j}$ sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
a) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Montrer que $\|f\| = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

b) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$. Montrer que $\|f\| = \displaystyle\max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

c) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|x\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$. On note X le vecteur colonne associé à x.

- **i)** Montrer que $\|f(x)\|_2^2 = {}^tX{}^tAAX$.
- **ii)** Justifier qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $P^{-1}{}^tAAP = D$.
- **iii)** Soit $r = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ est valeur propre de } {}^tAA\}$ le rayon spectral de la matrice ${}^tAA$. Montrer que $\|f\| = \sqrt{r}$.

d) Application : pour chacun des choix de normes précédents calculer la norme de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (x + 2y, 3x + y)$.

Exercice 5. Soit $U = (\mathbb{R}_+^*)^3$ et $f : U \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = xyz + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$.

a) Justifier rapidement que f est de classe C^2 sur U.

b) Montrer que f possède un unique point critique (x_0, y_0, z_0) que l'on déterminera.

On pose $K = \left[\frac{1}{4}, 64\right]^3$.

c) Montrer que si $(x, y, z) \notin K$ on a $f(x, y, z) > f(1, 1, 1)$. On pourra distinguer selon deux cas : soit x, y et z sont tous les trois supérieurs à $\frac{1}{4}$, soit l'une des trois coordonnées au moins et inférieure à $\frac{1}{4}$.

d) Montrer que f possède un minimum global sur U et le déterminer. f possède-t-elle un maximum global ? Jusitifiez.

Exercice 6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On dit que f est harmonique si $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$ où $\Delta f = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$. Le but de cet exercice est de démontrer le principe du maximum dans sa version faible :

> Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ continue sur $\bar{\Omega}$, de classe C^2 et harmonique sur Ω. Alors
> $$\inf_{\partial\Omega} f \leq f(x) \leq \sup_{\partial\Omega} f, \quad \forall x \in \Omega,$$
> où $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ désigne le bord de Ω. Autrement dit $\displaystyle\inf_{\partial\Omega} f = \inf_{\bar{\Omega}} f$ et $\displaystyle\sup_{\partial\Omega} f = \sup_{\bar{\Omega}} f$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n(x) = f(x) + \dfrac{\|x\|^2}{n}$, où $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de x.

a) Démontrer qu'il existe $x^{(n)} \in \bar{\Omega}$ en lequel la fonction f_n atteint son maximum sur $\bar{\Omega}$, i.e. tel que $f_n(x^{(n)}) = \max\{f_n(x) \mid x \in \bar{\Omega}\}$.

b) Montrer que $x^{(n)} \in \partial\Omega$ (Raisonner par l'absurde après avoir calculé Δf_n).

c) En déduire qu'il existe un point $x \in \partial\Omega$ en lequel la fonction f atteint son maximum sur $\bar{\Omega}$, puis le principe du maximum.

N.B. : la version forte du principe du maximum affirme que, sous les mêmes hypothèses, s'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $f(x_0) = \sup_{\partial\Omega} f$ alors f est constante (et de même pour la borne inférieure).

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (e^y + e^z, e^x - e^z, x)$. Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image, et que $f(\mathbb{R}^3)$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8. Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $V =]0,\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[$. Soit $\Psi : V \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Psi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
a) Montrer que Ψ est une application C^1 et bijective de V sur U et que

$$\Psi^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \arctan\frac{y}{x}\right).$$

b) En considérant $h = f \circ \Psi$, trouver toutes les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$\forall\, x,y \in U, \quad y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice 9. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|ab| < 1$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x + a\sin y, y + b\sin x)$. On veut montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $Df(x,y)$ est inversible.
b) Montrer que f est injective sur $\mathbb{R}^2$. En déduire que $f(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
c) Montrer que $f(\mathbb{R}^2)$ est fermé. Conclure.

Exercice 10. On munit $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire. On rappelle qu'une isométrie (vectorielle) est un endomorphisme φ tel que $\|\varphi(h)\| = \|h\|$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. De façon équivalente φ est une isométrie vectorielle ssi

$$\langle \varphi(h), \varphi(k)\rangle = \langle h, k\rangle, \qquad \forall h,k \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que $Df(x)$ soit une isométrie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Une telle application est appelée une isométrie "infinitésimale".
a) Montrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$ on a $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.
b) Montrer que, pour tout point $a \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage U_a de a et et $r > 0$ tels que la restriction de f à U_a soit un C^1-difféomorphisme de U_a sur $V = B(f(a), r)$.
c) Montrer que f^{-1} est une isométrie infinitésimale sur V, en déduire que $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ sur $U_a \times U_a$.
d) i) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Justifier que $Q_y(x) = \|f(x) - f(y)\|^2$ est différentiable et que

$$DQ_y(x)(h) = 2\langle Df(x)(h), f(x) - f(y)\rangle.$$

ii) Soient $x, h \in \mathbb{R}^n$. Justifier que $R(y) = 2\langle Df(x)(h), f(x) - f(y)\rangle$ est différentiable et que

$$DR(y)(k) = -2\langle Df(x)(h), Df(y)(k)\rangle.$$

iii) En déduire que $\langle Df(x)(h), Df(y)(k)\rangle = \langle h, k\rangle$, pour tout $x, y \in U_a$ et tout $h, k \in \mathbb{R}^n$, puis que $Df(x) = Df(y)$ pour tous $x, y \in U_a$.
e) Montrer finalement qu'il existe une isométrie vectorielle L et $\xi \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = L(x) + \xi$, i.e. f est une isométrie affine.
Ref : Gourdon - Analyse.

Exercice 11. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = z^4 - x^4 - 2z^2 + x^2 - y^2 - 1$.

a) Montrer que pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, l'équation $f(x,y,z) = 0$ possède une unique solution $\psi(x,y)$, strictement positive.

b) Montrer que la fonction ψ ainsi définie est de classe C^1.

c) Déterminer les points critiques de ψ.

d) Etudier les extrema globaux de ψ, interpréter par rapport à la surface $f = 0$.