Géométrie Affine

Dans les exercices qui suivent E est un espace affine sur un espace vectoriel $\vec{E}$

Exercice 1: On considère $\vec{E}$ muni de la structure affine canonique. Soit $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{F}$ une application linéaire et $\vec{v} \in \vec{F}$. Montrer que $\vec{f}^{-1}\{v\}$ est un sous-espace affine de $\vec{E}$ de direction $\ker(\vec{f})$.

Exercice 2: Supposons F et G deux sous-espace affine de E. Si les directions $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont supplémentaires, alors $F \cap G$ contient un et un seul point. Donner des exemples dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. (indication : Soit $A \in F$ et $B \in G$, alors $\overrightarrow{AB} \in \vec{F} \oplus \vec{G}$)

Exercice 3: Soit $f : E \to F$ une application affine

1. Si G un sous-espace affine de E, montrer que $f(G)$ est un sous-espace affine de F de direction $\vec{f}(\vec{G})$.
2. Si H est un sous-espace affine de F, montrer que $f^{-1}(H)$ est soit vide soit une sous-espace affine de E de direction $\vec{f}^{-1}(\vec{H})$.
3. f conserve l'alignement, c-à-d : si A, B, C sont alignés, alors $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ sont alignés.
4. f conserve le parallélisme des sous-espaces.

Exercice 4: Soit f une application affine. Alors f est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si $\vec{f}$ l'est.

Exercice 5: Montrer qu'une application affine est entièrement déterminée par la donnée de sa partie linéaire et de l'image d'un point.

Exercice 6: Si $A \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, l'application $h : E \to E$ définie comme $M \mapsto A + \lambda\overrightarrow{AM}$ s'appelle l'homothétie de centre A et de rapport λ.

1. Montrer que h est un automorphisme affine, de partie linéaire $\vec{h} = \lambda \mathrm{id}_{\vec{E}}$.
2. Si $\lambda \neq 1$, alors h n'admet qu'un point fixe. Sinon $h = \mathrm{id}$.

Exercice 7: Si $\vec{u} \in \vec{E}$, l'application $t_{\vec{u}} : E \to E$ définie comme $M \mapsto A + \vec{u}$ s'appelle la translation de vecteur $\vec{u}$.

1. Montrer que $t_{\vec{u}}$ est un automorphisme affine, de partie linéaire $\mathrm{id}_{\vec{E}}$.
2. Si $\vec{u} \neq 0$, alors $t_{\vec{u}}$ n'admet aucun point fixe. Sinon $t_{\vec{u}} = \mathrm{id}$.

Exercice 8: Soient E et F deux espaces vectoriels munis de leur structure affine canonique. Montrer que les applications affines de E dans F sont exactement les composées de la forme $t_{\vec{u}} \circ \sigma$, où $\vec{u} \in F$ et $\sigma \in L(E, F)$. indication : $\vec{u} = \overrightarrow{0_F f(0_E)}$ et $\sigma = \vec{f}$.

Exercice 9: Dans cet exercice on considère $\mathbb{C}$ d'abord comme une droite affine sur $\mathbb{C}$ et puis comme un plan affine sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que tout endomorphisme affine de la droite complexe $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto az + b$.
2. On considère $\mathbb{C}$ comme plan affine sur $\mathbb{R}$. Montrer que ses endomorphismes affines sont de la forme $z \mapsto az + b\bar{z} + c$.

Exercice 10: Si F est un sous-espace affine et $\vec{G}$ est un sous-espace vectoriel tel que $\vec{F}$ et $\vec{G}$ soient supplémentaires (pourquoi un tel $\vec{G}$ existe et comment la construire), on peut définir la projection p sur F de e direction $\vec{G}$ par : $p(M)$ est l'intersection de F avec le sous-espace affine passant par M et de direction $\vec{G}$. Montrer que

1. p est un endomorphisme affine de E, et sa partie linéaire $\vec{p}$ n'est autre qu'une projection vectorielle de $\vec{E}$ sur $\vec{F}$ parallèlement à $\vec{G}$.
2. $p \circ p = p$.
3. Montrer qu'une endomorphisme affine f tel que $f \circ f = f$ est une projection.

Exercice 11: Définir de même les symétries. Montrer que toute involution affine est une symétrie.

Exercice 12: (Théorème de Thalès généralisé) Dans un espace affine de dimension ≥ 2, soient H_1, H_2, H_C trois hyperplans parallèles et distincts, et soit D, D' deux droites non parallèles à ces hyperplans. Notons A, B, C (resp. A', B', C') les points d'intersection de D (resp. de D') avec H_A, H_B, H_C. Alors $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.

Exercice 13: Classifier toutes les isométries vectorielles de $\mathbb{R}$. Donc $SO(1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 14: Soit σ une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que σ conserve les angles droits.
2. En déduire que si σ est soit une rotation soit une symétrie axiale.
3. Les quelles conservent les notions d'angles orientés?
4. Les quelles sont diagonalisables?
5. Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à cercle d'unité.

Exercice 15: Soit σ une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

1. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et A la matrice de σ dans cette base. Montrer que ${}^tAA = I_3$.
2. En déduire que $\det(A) = \pm 1$.
3. Dans le cas où $\det(A) = 1$ (dite isométrie directe), montrer que A (et donc σ) admet comme valeur propre.

4. Montrer que $E_1^\perp$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ qui est σ-stable.

5. En déduire qu'il existe une base orthonormée telle que la matrice de σ est de forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dans ce cas on appelle σ une rotation d'angle θ et d'axe $D = \ker(\sigma - \mathrm{id})$ et on la note $r_{D,\theta}$.

Exercice 16: On suppose σ une isométrie vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont le déterminant est -1.

1. Montrer que $\mathrm{id} \circ \sigma$ est une isométrie directe.

2. En déduire qu'il existe une b.o.n. telle que la matrice de σ dans cette base est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dans ce cas on appelle σ l'antirotation de droite $\ker(\sigma + \mathrm{id})$ et d'angle θ.

3. Montrer que $\sigma = r_{D,\theta} \circ s_D = s_D \circ r_{D,\theta}$. indication : calcul matricielle est plus facile.

Exercice 17: Dans cet exercice nous voulons montrer que toute isométrie est une application affine. Donc soit E un espace affine euclidien et notons $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire de $\vec{E}$.

1. Montrer que toute application $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}$ qui conserve le produit scalaire est linéaire et bijective. On prend deux vecteur $\vec{u}$, $\vec{v} \in \vec{E}$ et on calcule $\left\|\vec{f}(\vec{u}+\lambda\vec{v}) - \vec{f}(\vec{u}) - \lambda\vec{f}(\vec{v})\right\|^2$.

2. Fixons un point $O \in E$ et considérons $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}$ définie comme $\vec{f}(\vec{u}) = \overrightarrow{f(O)(f(M)}$ où $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Soient $\vec{u}$, $\vec{v} \in \vec{E}$ ($\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$). Montrer que $2\langle\vec{f}(\vec{u}), \vec{f}(\vec{v})\rangle = 2\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle$.

3. Conclure

Exercice 18: (Classification des isométries du plan par les points fixes) Soit f une isométrie du plan affine euclidien E. Montrer que

1. s'il existe trois points non alignés fixés par f, alors f est l'identité.

2. si f fixe deux points distincts A, B, alors f est soit l'identité soit la réflexion d'axe (AB).

3. si f fixe le point A, alors f est soit l'identité, soit une réflexion dont l'axe passe par A, soit une rotation de centre A.

4. toute isométrie du plan est composée d'au plus trois réflexions.

Exercice 19: Soit D et D' deux droites du plan affine euclidien E.

1. Montrer que si D et D' sont parallèles, alors $s_D \circ s_{D'}$ est une translation. Donner le vecteur de translation.

2. Montrer que si D et D' sont sécantes en un point O, alors $s_D \circ s_{D'}$ est une rotation de centre O. Donner l'angle de rotation.

3. Réciproquement, montrer que toute rotation de centre O peut se décomposer sous la forme $s_D \circ s_{D'}$ où D et D' ont sécantes en A, l'une d'entre elles pouvant être choisie arbitrairement.

Exercice 20: Soit s_D la réflexion d'axe D et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

1. Montrer que si $\vec{u} \perp D$, alors $s_D \circ t_{\vec{u}}$ est une réflexion d'axe parallèle D.

2. Montrer que dans le cas contraire $s_D \circ t_{\vec{u}}$ est une symétrie glissée.

Exercice 21: Montrer que la composée de trois réflexions du plan est ou bien une réflexion ou bien une symétrie glissée.

Exercice 22: (Classification des isométries de l'espace affine euclidien par les points fixes) Soit f une isométrie de l'espace affine euclidien E. Montrer que

1. s'il existe quatre points non coplanaires fixés par f, alors f est l'identité.

2. si f fixe trois points non alignés, alors f est soit l'identité soit la réflexion par rapport au plan défini par ces trois points.

3. si f fixe deux points distincts A, B, alors f est soit l'identité, soit une réflexion par rapport d'un plan contenant ces point, soit une composée de deux réflexions dont les axes contiennent (AB).

4. Si f fixe le point A, alors f est soit l'identité, soit une réflexion par rapport un plan passant par A, soit une rotation d'une axe passant par A, soit la composée de trois réflexions.

5. toute isométrie de l'espace euclidien est composée d'au plus quatre réflexions.