Algèbre Linéaire

Dans les exercices suivants $(E, +, \cdot)$ est supposé un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

Exercice 1: Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $v \in E$. Montrer que $\lambda v = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $v = 0_E$. En suite montrer que $(-1)v = -v$.

Exercice 2: Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ muni des lois suivantes est un espace vectoriel réel.

$$x \oplus y = xy \qquad r \otimes x = x^r \qquad \text{où } x, y \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } r \in \mathbb{R}$$

Exercice 3: La somme de deux sous-espaces est toujours un sous-espace vectoriel. MAIS la réunion n'est presque jamais un sous-espace. En effet, soit F et G deux sous-espaces de E, montrer que

1. $F \cap G$ est un sous-espace de E.
2. $F \cup G$ est un sous-espace $\iff$ $F \subset G$ ou $G \subset F$..

Exercice 4: Généralisation de l'Exercice 3. On suppose qu'un espace E soit la réunion d'un nombre fini de sous-espaces $E_1, \dots, E_n$ avec $n \geq 2$. Quitte à jeter certains sous-espaces, on peut supposer n minimal. Alors pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $F_i \not\subset \cup_{j \neq i} F_j$. On peut donc choisir $x_i \in F_i$, $x_i \notin \cup_{j \neq i} F_j$. On a une infinité de vecteurs de la formes $tx_1 + (1-t)x_2$. Donc l'un des F_i contient au moins deux de ces vecteurs. (Pourquoi?) En déduire une contradiction.
Peut-on supprimer l'hypothèse sur $\mathbb{K}$?

Exercice 5: Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni des lois usuelles, lequel de ces sous-ensembles est-il un sous-espace vectoriel? Dans le cas échéant donner une base et deux sous-espaces supplémentaires.

$$E = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \ A = \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} \right\} \quad F = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \ A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 6: Vrai ou faux ? Toute sous-famille/sur-famille d'une famille libre/génératrice est libre/génératrice.

Exercice 7: Ecrire le vecteur (a, b, c) comme combinaison linéaire des vecteurs

$$v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (1, 1, 1), \quad v_3 = (1, 0, 0).$$

Exercice 8: Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 9: On prend $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et $E = \mathbb{R}$. Montrer que $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est libre. Est-ce que la famille $\{(1+\sqrt{2})^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est libre ? Quelle propriété permet de montrer que la famille $\{\pi^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est libre ?

Exercice 10: On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Etudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :

1. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $f_n(x) = \sin(nx)$. Indication : dériver deux fois la combinaison linéaire.
2. $(g_n)_{a \in \mathbb{R}}$ où $g_a(x) = |x - a|$. Indication : en séparant un terme $|x - a|$ montrer que la combinaison linéaire est à la fois dérivable et non dérivable en a.
3. $(h_r)_{r \in \mathbb{R}}$ où $h_r(x) = e^{ax}$. Indication : diviser par l'exponentielle correspondant au paramètre plus grand et passer à la limite en $+\infty$.

Exercice 11: Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le but de cet exercice est de donner une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles.

1. Donner une liste des polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.
2. Donner l'énoncé du théorème de décomposition en éléments simples.
3. Déterminer une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}(X)$.

Exercice 12: Bases et supplémentaires.

1. Supposons $E = F \oplus G$. Notons $\mathcal{B}$ une base de F et $\mathcal{B}'$ une base de G. Montrer que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E.
2. Supposons $\mathcal{B} \coprod \mathcal{B}'$. Montrer que les sous-espaces engendrés par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont supplémentaires.
3. Utilisant le théorème de la base incomplète, montrer que tout sous-espace possède un supplémentaire.

Exercice 13: Montrer que l'on définit une unique application linéaire avec l'une des données suivantes :

1. l'image d'une base de l'espace de départ ;
2. sa restriction à deux sous-espaces supplémentaires.

Exercice 14: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} f : F \times G &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$
est linéaire. Déterminer l'image et le noyau de cette application.
2. Appliquer le théorème du rang à ce morphisme.

Exercice 15: Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que l'ensemble des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont des sous-espaces supplémentaires de E.
2. Vérifier que l'application $f \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)dt$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. Trouver un supplémentaire de son noyau.

Exercice 16: Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans lui-même.

1. Montrer que, si $F \subset f(F)$ alors $f(F) = F$.
2. Montrer que, si f est injective et $f(F) \subset F$ alors $f(F) = F$.

Exercice 17: Soit E un espace vectoriel, et u une application linéaire de E dans E. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est libre, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$.
2. Si $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$ est libre, il en est de même de $e_1, e_2, \ldots, e_p$.

3. Si $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est génératrice, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$.

4. Si $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$ est génératrice, il en est de même de $e_1, e_2, \ldots, e_p$.

5. Si $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$ est une base de Im u, alors $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est une base d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\ker u$.

Exercice 18: Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ une application linéaire. Montrer que (utilisant les normes habituelles) f est continue.

Exercice 19: Déterminer une base de $\ker f$ et une base de Im f, lorsque

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x - y + z + t,\ x + 2z - t,\ x + y - 3z - 3t) \end{array}$$

Exercice 20: Même question avec

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & AM - MA \end{array} \qquad \text{ave} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 21: Montrer que l'application linéaire suivante est un isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto & \phi(P) = (P(0), P(1), P(2), \ldots, P(n-1)) \end{array}$$

Exercice 22: Soient $g : G \to E$, $f : E \to F$, et $h : F \to G$ linéaires avec g surjective et h injective. Montrer que

$$\text{rg} f = \text{rg}(f \circ g) \quad \text{et} \quad \text{rg} f = \text{rg}(h \circ f)$$

Exercice 23: Montrer que l'application suivante est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\alpha\ : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \qquad P \mapsto \int_0^1 P(t)dt$$

Pour $i \in \{0, ..., n\}$, on note $\alpha_i : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ l'application $P \mapsto P(i/n)$.

1. Montrer que α_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Et la famille $(\alpha_0, ..., \alpha_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.

3. En déduire que :

$$\exists (\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad \int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(i/n)$$

Exercice 24: On considère l'application u suivante :

$$\begin{array}{rcl} u\ : \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Calculer ${}^t u(\alpha)$ lorsque : $\alpha(P) = P(0)$ et $\alpha(P) = \int_0^1 P(t)dt$.

Exercice 25: Soit E_1 et E_2 deux supplémentaires de E. Pour $x \in E$, on écrit $x = x_1 + x_2$, de façon unique, avec $x_i \in E_i$. On note

$$\begin{aligned} p_1 : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x_1 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} p_2 : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x_2 \end{aligned}$$

p_1 est la projection de E sur E_1 parallèlement à E_2 et on définit de même p_2. Calculer $p_1 \circ p_1$, $p_2 \circ p_2$ et $p_1 + p_2$.

Exercice 26: Inversement, soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'un endomorphisme p de E est une projection si $p \circ p = p$. Montrer que $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

Exercice 27: Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. On dit que l'endomorphisme $\sigma : E \to E$ est une symétrie de E si $\sigma \circ \sigma = Id_E$.

1. Montrer que σ est un isomorphisme et que $\sigma^{-1} = \sigma$.
2. On pose
$$E_1 = \{x \in E \mid \ \sigma(x) = x\} \quad \text{et} \quad E_{-1} = \{x \in E \mid \sigma(x) = -x\}.$$
Montrer que E_1 et E_{-1} sont des sous-espaces vectoriels de E et que
$$E = E_1 \oplus E_{-1}$$
3. Soit F et G deux sous-espace vectoriels de E qui sont supplémentaires. Si $x \in E$, il existe alors unique couple (y, z) avec $y \in F$ et $z \in G$ tel que $x = y + z$. Montrer que l'application $\sigma : E \to E$, définie en posant
$$\sigma(x) = y - z,$$
est une symétrie de E telle que $F = E_1$ et $G = E_{-1}$.

Exercice 28: Soit $\phi : E \to E$ une application linéaire telle que pour tout $x \in E$ la famille $(x, \phi(x))$ soit liée. Montrer que ϕ est une homothétie.

Exercice 29: Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donner sa matrice M' dans la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$, où $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$ et $f_3 = e_1 - e_2 + e_3$.

Exercice 30: Résoudre l'équation matricielle $AX - I = A^{101}$, où $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 31: Soit $\phi : E \to E$ un endomorphisme de E, $\dim E = n$. On suppose que $\phi^n = 0$ et $\phi^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle ϕ est representée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Application : Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 32: On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? si oui, les réduire en donnant une matrice de passage.

Exercice 33: Les questions sont indépendantes. K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base fixée de E et f un endomorphisme de E.

1. Donner un exemple de matrice de $M_2(K)$ non trigonalisable.
2. Donner un exemple de matrice de $M_n(K)$ à la fois non diagonalisable et trigonalisable.
3. Déterminer sans calculs les valeurs propres complexes de f si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
4. On suppose que $n = 3$ et que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$. Montrer que le plan d'équation $x + 2z = 0$ est stable par f.
5. Que peut-on dire d'un vecteur générateur d'une droite stable par f ?
6. Montrer que si l'endomorphisme f est trigonalisable alors il admet au moins un sous-espace vectoriel stable par f et de dimension $k \in [0, n]$ fixée.

Exercice 34: Soit

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{pmatrix}$$

Sans calculer le polynôme caractéristique de A_t, montrer que $(t-1)$ est valeur propre. Déterminer l'espace propre associé. Que dire de la multiplicité de la valeur propre $(t-1)$? En déduire le spectre de A_t. A_t est-elle diagonalisable ?

Exercice 35: La matrice suivante est-elle diagonalisable, triangularisable? Effectuer explicitement la réduction.

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$$

Exercice 36: Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si λ est valeur propre de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).

Exercice 37: Soit $u : \mathbb{R}^2[X] \to \mathbb{R}^2[X]$ l'application

$$u(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$$

1. Montrer que u est bien dèfinie et linéaire.
2. Déterminer les valeurs propres de u, et, si c'est possible, diagonaliser u.
3. Calculer $u^n(a_0 + a_1 X + a_2 X^2)$.

Exercice 38: On considère la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ Trouver une matrice B telle que $B^2 = A$.

Exercice 39: Résoudre le système différentielle

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Exercice 40: Même question pour

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - x_3 \end{cases}$$

Exercice 41: Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Le plan P d'équation $y + z = 0$ est-il stable par f ? La droite $vect\{(1,1,1)\}$ est-elle stable par f ?
2. Soit $\mathcal{B}$ une base du plan P. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \mathcal{B} \cup \{(1,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice de f dans cette nouvelle base et expliquer le résultat.

Exercice 42: Mettre sous forme triangulaire les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 43: Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel canonique $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f^2 \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id})$.
2. Trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que $\ker f^2$ est stable par g. En déduire qu'un tel endomorphisme g ne peut exister.

Exercice 44: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Trouver une base $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - Id)^2$ sont laissés stables par g. En déduire que la matrice de g dans $\mathcal{B}'$ est de la forme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Préciser les valeurs possibles de a, b, c et d.
4. Soit $F = \{B \in M_3(\mathbb{R}); AB = BA\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. Calculer sa dimension (on pourra utiliser la question 3.).

Exercice 45: Si les matrices sont trigonalisables et $AB = 0$, alors A et B sont simultanément trigonalisables.