Equations différentielles

1 Equations différentielles linéaires

1.1 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Prévention : Attention "Résoudre l'équation différentielle $a(t).y' + b(t)y = c(t)$" ne veut jamais rien dire. Il faut toujours préciser sur quel intervalle de définition on recherche les solutions.

Proposition 1.1 *Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions, y, dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) + a(t).y(t) = b(t),$$

est un espace affine de dimension 1. Si on note S cet ensemble alors pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, l'application de S dans $\mathbb{R}$ qui à toute fonction y associe $y(t_0)$ est une bijection.

Preuve :
1) On traite d'abord le cas où b est la fonction nulle. On peut montrer les résultats en donnant explicitement l'ensemble des solutions qui est constitué des fonctions de la forme $y(t) = \lambda e^{-A(t)}$ où λ est un réel fixé et A une primitive de la fonction a.
2) Pour résoudre l'équation avec son second membre, on peut expliciter la méthode de la variation de la constante pour conclure c'est à dire en cherchant une solution particuliè re de la forme $y(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ où λ est une fonction à déterminer et A une primitive de la fonction a.

Exercice :
1) Quels résultats peut-on énoncer sur la nature de l'ensemble des solutions de l'équation suivante :

$$a(t).y'(t) + b(t)y(t) = c(t),$$

où a,b et c sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
2) Etudier en fonction des valeurs de k l'équation

$$ty'(t) + ky(t) = 0.$$

3) On se propose d'étudier l'équation

$$(t^3 + 3t^2 + 2t)y' + y - (1 + t)^3 = 0.$$

a) Chercher une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.
b) Montrer que si y est solution sur I alors $t \mapsto -y(-t-2)$ est aussi une

solution sur un intervalle que l'on précisera.

c) Résoudre cette équations sur les intervalles $]-\infty,-2[$, $]-2,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$.

d) Résoudre cette équation sur $]-\infty,-1[$, $]-2,0[$ puis $\mathbb{R}$.

1.2 Fonctions vectorielles

Soient A une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{R})$ et B une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.1 *L'ensemble des fonctions, Y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) + A(t).Y(t) = B(t),$$

est un espace affine de dimension n. Si on note S cet ensemble alors pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, l'application de S dans $\mathbb{R}^n$ qui à toute fonction Y associe $Y(t_0)$ est une bijection.

Les équations de cette forme s'appellent les équations différentielles linéaires d'ordre n.

Idée de preuve :
1) Reformuler la deuxième partie de cette propriété en faisant apparaître une application de $\mathbb{R}^n$ dans S.
2) En admettant le deuxième résultat, montrer la première partie.
3) Soit $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. On définit la fonctionnelle Φ qui à toute fonction Y associe :

$$\Phi(Y) : t \longmapsto Y_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(s)Y(s) + B(s)\big)ds.$$

a) Montrer que Y est solution si et seulement $\Phi(Y) = Y$.

b) Montrer que pour tout $A > 0$ fixé, il existe $k > 0$ tel que pour tout Y_1, Y_2 continues

$$\forall t \in [t_0 - A, t_0 + A],\ \|\Phi(Y_1)(t) - \Phi(Y_2)(t)\| \leq k|t - t_0|\|Y_1 - Y_2\|_\infty.$$

c) En déduire qu'il existe $\eta > 0$ tel que Φ appliquée aux fonctions définies sur $I_{t_0,\eta} = [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ admet un point fixe.

On peut montrer par récurrence sur n que pour tout $A > 0$ fixé, il existe une constante $k > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$, pour tout Y_1, Y_2 continues

$$\forall t \in [t_0 - A, t_0 + A],\ \|\Phi^n(Y_1)(t) - \Phi^n(Y_2)(t)\| \leq \frac{k^n|t - t_0|^n}{n!}\|Y_1 - Y_2\|_\infty.$$

d) En déduire l'existence d'un unique point fixe de Φ appliquées aux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Vérifier que si $\varphi : E \to E$ une application vérifie qu'il existe un entier naturel $n > 1$ tel que φ^n admet un unique point fixe alors φ admet un unique point fixe.

Applications :

1) Soit $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ une base d'un systéme homogéne. Montrer que pour tout B, les solutions de l'équation générale sont de la forme $Z(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)Y_i(t)$. On parle de variations des constantes.
2) Etude sur $\mathbb{R}$ de

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t).$$

a) En posant $z(t) = y'(t)$, ramener cette équation à une équation différentielle linéaire vectorielle d'ordre 2.
b) En déduire la nature de l'ensemble des solutions.
c) Expliciter le cas de la variation des constantes.

Exercice :
1) Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$y'' - 2y' + 2y = e^t(2\cos(t) - 4t\sin(t))$$

2) Donner les solutions vérifiant $z(0) = 0$ et $z(\frac{\pi}{2}) = 0$.
3) Donner les solutions vérifiant $z(0) = 0$ et $z(\pi) = 0$.

Remarque
Expliquer pourquoi une équation différentielle sur une fonction y définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$$

est aussi appelé équation différentielle linéaire d'ordre n.

2 Equations différentielles non-linéaires

Definition 1 *On dit qu'une équation différentielle sur I est à variables séparables si on peut la mettre sous la forme :*

$$y'a(y) = b(t),$$

où a et b sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Si A et B sont des primitives respectives de a et b alors toute solution y doit vérifier qu'il existe une constante K telle que

$$\forall t \in I, \quad A(y(t)) = B(t) + K.$$

Théorème 2.1 Théorèreme de Cauchy-Lipschitz
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de classe C^1 définie de Ω dans $\mathbb{R}$ alors pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe une unique solution maximale à l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Exercice 1 :(Courbes intégrales)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = 2ty^2.$$

1) Préciser sur quel domaine s'applique le théorème de Cauchy-Lipschitz ici.
2) De quelle famille d'équation s'agit-il ? Résolvez cette équation.
3) Représentez les courbes intégrales.
4) En déduire la nature des solutions maximales au problème de Cauchy $f(t_0) = y_0$ en fonction de (t_0, y_0).

Exercice 2 :(Etudes de solutions maximales)

On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$y'^2 y^2 = 9 - y^2.$$

1) Il s'agit d'une équation autonome (on ne voit pas la variable t). Vérifier que si y est une solution alors pour tout t_0, $t \mapsto y(t + t_0)$ est aussi solution (vraie pour toutes les équations autonomes).
2) Montrer que si y est solution alors pour tout t, $|y(t)| \leq 3$.
3) Montrer que si y est solution sur un intervalle I alors elle ne peut pas s'annuler. Expliquer pourquoi dans la suite on pourra se limiter à traiter le cas $y > 0$.
4) En déduire une nouvelle expression de cette équation permettant d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz (On précisera les domaines en questions).
5) Trouver toutes les solutions maximales de cette équation.

Exercice 3 :(Champ de vecteurs)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = \sin^2(y).$$

1) Dessiner le champ de vecteurs associé à cette équation.
2) En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, montrer que si y est solution sur I alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{aligned} &\text{soit}, \quad \forall t \in I, y(t) = k\pi, \\ &\text{soit}, \quad \forall t \in I, y(t) \in]k\pi, (k+1)\pi[. \end{aligned}$$

3) En utilisant le champs de vecteurs, en déduire que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.
4) Donner l'allure des courbes intégrales.
5) Résolvez l'équation.

Exercice 4 :(Schéma d'Euler)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = 1 + y^2.$$

1) Donner une solution évidente à cette équation.
2) En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz et la nature de l'équation, en déduire toutes les solutions de cette équation.
3) Pour $y(0) = 0$, on construit un schéma d'Euler avec des pas de $\frac{1}{n}$, ce qui définit une suite de fonctions (y_n).
a) Vérifier que les fonctions y_n sont définies sur $\mathbb{R}^+$.
b) Vérifier que les fonctions y_n sont convexes.
c) Montrer que la suite (y_n) est croissante.
d) En déduire le comportement de convergence simple de (y_n) en utilisant la solution exacte de l'équation.
e) Avec cette méthode, comment obtient-on une valeur approchée de $\tan(1)$, de $\tan(\frac{\pi}{3})$?

Exercice 5 :(Champ de vecteurs)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = x^2 - y^2.$$

1) Dessiner le champ de vecteurs associé à cette équation.
2) En utilisant le champs de vecteurs et le théorème de Cauchy-Lipschitz, montrer que la solution telle que $y(0) = 0$ est strictement croissante. Montrer que c'est la seule.
3) Justifier que les solutions sont C^∞.
4) Donner une condition pour connaître le signe de la dérivée seconde en un point (x_0, y_0) d'une solution passant en ce point.
5) Dessiner l'allure de quelques courbes intégrales.