Endomorphismes diagonalisables

Notation : Dans les exercices suivants

1. le polynôme caractéristique de f est noté $\chi_f(X)$ (et d'après Cayley-Hamilton $\chi_f(f) = 0$)
2. le polynôme minimal de f est noté $\mu_f(X)$ (et μ_f divise tout polynôme annulateur de f. En particulier μ_f divise χ_f)
3. Le sous-espace propre de valeur propre λ d'un endomorphisme f est noté $E_{f,\lambda}$ ou E_λ quand il n'y a pas d'ambiguïté sur f.

Exercice 1: On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire.

Correction : La matrice A est diagonalisable. On a $\chi_A(X) = -(X-3)^2(X-5)$ et $\mu_A(X) = (X-3)(X-5)$. Donc A a deux valeurs propres 3 et 5 où les sous-spaces propres associés sont E_3 est d'équation $x + y - z = 0$ et $E_5 = vect\{(1, 2, 1)\}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ une matrix de diagonalisation.

La matrice B n'est pas diagonalisable : Elle n'a qu'une valeur propre 1 et le sous-espace propre associé E_1, d'équation $y = 0$ est de dimension 2. On peut aussi calculer son polynôme minimal : $\mu_B(X) = (X-1)^2$ qui n'est pas de racines simples. (*NB :* Une matrice M ayant une seule valeur propre λ est diagonalisable ssi $\mu_M(X) = (X-\lambda)$. Autrement dit ssi $M = \lambda I_n$)

La matrice C est diagonalisable ayant deux valeurs propres : 1 et 3 ; de polynôme caractéristique $\mu_A(X) = -(X-3)^2(X-1)$ où les sous-spaces propres associés sont E_3 d'équation $-x + y + z = 0$ et $E_1 = vect\{(2, -1, 1)\}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ une matrix de diagonalisation pour C. La matrice D n'est pas diagonalisable: Elle n'a qu'une valeur propre 2, mais le sous-espace propre associé E_2 est de dimension 2 ; son polynôme minimal est $\mu_D(X) = (X-2)^2$.

Exercice 2: Soit J la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une relation entre J et J^2.
2. En déduire les valeurs propres de J et calculer leurs multiplicités.
3. Donner le polynôme caractéristique de J.

Correction : $J^2 = nJ$. Donc $X^2 - nX$ est un polynôme annulateur de J et puisqu'il est scindé à racines simples, on a que J est diagonalisable. On sait que les racines du polynôme minimal $\mu_J(X)$ sont les valeurs propres de J et que $\mu_J(X)$ divise tous les polynômes annulateurs de J. Donc les valeurs propres possibles de J sont 0 et n.

$\ker J$ est d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$ donc il est non nul donc zero est une valeur propre de J. De même $\ker(J - nI_n)$ est non nul car il est engendré par $vect\{(1, \ldots, 1)\}$. Puisque J est diagonalisable nous avons que multiplicité de la valeur propre λ dans le polynôme caractéristique = dimension du sous-espace propre E_λ. Donc $\chi_J(X) = (-1)^n(X-n)X^{n-1}$.

Exercice 3: Soit f un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Donner le polynôme caractéristique de f. Que peut-on dire sur le polynôme minimal de f?
2. En déduire qu'un endomorphisme nilpotent est diagonalisable si et seulement si il est nul.

Correction : Un endomorphisme f, est nilpotent si il existe un entier naturel $k \in N^*$ tel que $f^k = 0$. Puisque μ_f divise tout polynôme annulateur de f, on déduit que μ_f est de forme X^l. Puisque χ_f et μ_f ont les mêmes racines et que χ_f est de degré $= \dim E$, on a $\chi_f(X) = (-1)^n X^n$. f est diagonalisable ssi μ_f est scindé à racines simples. Donc un endomorphisme nilpotent f, est diagonalisable ssi $\mu_f(X) = X$. Autrement dit $f = 0$.

Exercice 4: Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A_m et une base de vecteurs propres.
2. Déterminer suivant les valeurs de m le rang de A_m. Déterminer lorsque cela est possible A_m^{-1}.
3. Lorsque A_m n'est pas inversible déterminer le noyau et l'image de A_m.
4. Généraliser à $A_m \in M_n(\mathbb{R})$.

Correction : λ est une valeur propre de A_m ssi $\det(A - \lambda I_3) = 0$. On voit que $A_m - (m-1)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est de déterminant 0. D'où $m-1$ est une valeur propre de A_m et le sous-espace propre associé est de dimension 2. On voit aussi que le vecteur $(1,1,1)$ est un vecteur propre de valeur propre $m+2$.
Il y a trois cas à considérer : Si $m = 1$ alors A_m est de rang 1. Si $m = -2$ alors A_m est de rang 2. Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, alors A_m est de rang 3. La matrice A_m est inversible ssi rg $A = 3$. Dans ce cas $A_m^{-1} = \frac{1}{(m-1)(m+2)} \begin{pmatrix} m+1 & -1 & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$.
Si A_m n'est pas inversible, il y a deux cas à considérer : Si $m = 1$, alors $\ker A_1$ est d'équation $x + y + z = 0$ et l'image est engendré par le vecteur $(1,1,1)$. Si $m = -2$, alors $\ker A_{-2}$ est de dimension 1 engendré par le vecteur $(2,1,1)$ et image de A_{-2} est de dimension 2, d'équation $x + y = 0$.
On peut généraliser à $A_m \in M_n(\mathbb{R})$ où $a_{ii} = m$ et pour $i \neq j$ on a $a_{ij} = 1$. A_m est diagonalisable admettant deux valeurs propres : la valeur propre $m-1$ de multiplicité $n-1$, d'espace propre d'équation $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ et la valeur propre $m+n-1$ de multiplicité 1 et d'espace propre engendré par le vecteur $(1,\ldots,1)$.

Exercice 5: Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in L(E)$. Montrer que si λ est valeur propres de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$ aussi (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).
Correction : On rappelle que λ est valeur propre d'une application linéaire $h : E \to E$ si il existe un vecteur $w \neq 0$ de E tel que $h(w) = \lambda w$.
Cas 1) $\lambda \neq 0$. Puisque λ est valeur propre de $g \circ f$, alors il existe un vecteur $v \neq 0$ tel que $g \circ f(v) = \lambda v$. On a

$$f(g \circ f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \Longrightarrow \quad f \circ g(f(v)) = \lambda f(v)$$

De plus $f(v) \neq 0$, sinon $\lambda v = g \circ f(v) = 0$. Impossible car $\lambda \neq 0$ et $v \neq 0$. Donc λ est valeur propre de $f \circ g$.
Cas 2) $\lambda = 0$. Or il existe un vecteur $v \neq 0$ tel que $g \circ f(v) = 0$. Si g est inversible on a $f(v) = 0$: d'où $f \circ g(g^{-1}(v)) = 0$ et donc $g^{-1}(v)$ est vecteur propre de $f \circ g$ de valeur propre 0. Si g n'est pas inversible, alors, il existe un vecteur $w \neq 0$ de E tel que $g(w) = 0$: d'où $f \circ g(w) = 0$. Donc w est vecteur propre de $f \circ g$ de valeur propre 0.

Exercice 6: Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$. Est-ce que M est diagonalisable si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$? et si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?
Correction : $\chi_M(X) = -X^3 + 1$. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ce polynôme n'est pas scindé, donc M n'est pas diagonalisable. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ce polynôme est scindé à racines simples, donc M est diagonalisable. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on a $-X^3 + 1 = -(X-1)^3$: Or χ_M est scindé, mais M n'étant pas I_3, μ_M n'est pas $(X-1)$. Donc μ_M n'est pas à racines simples et M n'est pas diagonalisable.

Exercice 7: Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E. On définit la projection p, sur F parallèlement à G l'application telle que si

$$x = y + z \text{ avec } \ y \in F \ \text{ et } z \in G \ \text{ alors } \ p(x) = y$$

1. Montrer que p est une application linéaire et que $p^2 = p$.
2. Montrer que p est diagonalisable et reconnaitre les sous-espaces propres.
3. Montrer que toute application linéaire telle que $p^2 = p$ est une projection.

Correction : On rappelle que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E si

$$\forall x \in E \quad \exists! y \in F \ \exists! z \in G \ \text{ tels que } \ x = y + z$$

Soient $x = y + z$ et $x' = y' + z'$ deux vecteurs de E avec $y, y' \in F$ et $z, z' \in G$. Or F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $x + \lambda x' \in F$ et $y + \lambda y' \in G$. On déduit que la décomposition de $x + \lambda x'$ comme somme des vecteurs de F et G est

$$x + \lambda x' = \underbrace{(y + \lambda y')}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{(z + \lambda z')}_{\in \mathrm{G}} \quad \Longrightarrow \quad p(x + \lambda x') = y + \lambda y'$$

Donc $p(x + \lambda x') = p(x) + \lambda p(x')$ et p est une application linéaire. Puisque $p(x) \in F$ pour tout $x \in E$, on a que

$$p(x) = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{0}_{\in \mathrm{G}} \quad \Longrightarrow \quad p(p(x)) = p(x) \quad \Longrightarrow \quad p^2 = p$$

Puisque $p^2 = p$ le polynôme $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p. Et puisque $X^2 - X = X(X-1)$ est scindé à racines simples, p est diagonalisable comme valeurs propres possibles 0 et 1. Un calcule facile montre que $E_0 = \ker p = G$ et $E_1 = F = \mathrm{im}\ p$.

Supposons maintenant qu'une application linéaire p est telle que $p^2 = p$. Montrons que $E = \mathrm{im}\ p \oplus \ker p$:

1. Soit $x \in \mathrm{im}\ p \cap \ker p$. Il existe x' tel que $p(x') = x$. Donc $x = p(x') = p^2(x') = p(p(x')) = p(x) = 0$.
2. Le théorème du rang donne $\dim \mathrm{im}\ p + \dim \ker p = \dim E$.

Un calcule facile montre que p est une projection avec $F = \mathrm{im}\ p$ et $G = \ker p$.

Exercice 8: Soit P_0 un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, et $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application qui à P associe le reste de la division euclidienne de P par P_0.

1. Déterminer f^2 et montrer que f est diagonalisable.
2. Expliciter la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ dans le cas où $P_0 = (X^2 - 1) \in \mathbb{R}_4[X]$ et en déterminer une base de vecteur propres de f.

Correction : (Division euclidienne par P_0 dit que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique couple de polynômes $Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que

$$P = QP_0 + R \qquad \text{avec } \ 0 \leq \deg R < P_0$$

Avec cette notation on a $f(P) = R$. Donc si $\deg A < \deg P_0$, on a $f(P) = P$. Puisque $\deg f(P) < \deg P_0$, on a $f^2(P) = f(P)$ pour tout polynôme P et donc $f^2 = f$; f est une projection; il est diagonalisable avec deux valeurs propres 0 et 1.
La base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ est $\mathcal{B} = \{A_i\}_{i=0}^4$ avec $A_i = X^i$. Donc

1. Pour A_0 : Le reste de la division euclidienne du polynôme constant A_0 par P_0 est lui même.

2. Pour A_1 : Le reste de la division euclidienne du polynôme $A_1 = X$ par P_0 est lui même.
3. Pour A_2 : On a $X^2 = X^2 - 1 + 1$; le reste de la division euclidienne de A_2 par P_0 est A_0.
4. Pour A_3 : On a $X^3 = X(X^2 - 1) + X$; le reste de la division euclidienne de A_3 par P_0 est A_1.
5. Pour A_4 : On a $X^4 = (X^2 + 1)(X^2 - 1) + 1$, le reste de la division euclidienne de A_2 par P_0 est A_0.

Alors $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ avec $(A_0,\ A_1,\ A_2 - A_0,\ A_1 - A_0,\ A_3 - A_1)$ une base de diagonalisation pour f.

Exercice 9: Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E. On définit la symétrie σ, d'axe F parallèlement à G l'application telle que si

$$x = y + z \text{ avec } y \in F \text{ et } z \in G \text{ alors } \ \sigma(x) = y - z$$

1. Montrer que σ est une application linéaire et que $\sigma^2 = \mathrm{id}$.

2. Montrer que σ est diagonalisable et reconnaitre les sous-espaces propres.

3. Montrer que toute application linéaire telle que $\sigma^2 = \mathrm{id}$ est une symétrie.

Correction : On rappelle que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E si

$$\forall x \in E \quad \exists! y \in F \ \ \exists! z \in G \ \text{ tels que } \ x = y + z$$

Soient $x = y + z$ et $x' = y' + z'$ deux vecteurs de E avec $y, y' \in F$ et $z, z' \in G$. Or F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $x + \lambda x' \in F$ et $y + \lambda y' \in G$. On déduit que la décomposition de $x + \lambda x'$ comme somme des vecteurs de F et G est

$$x + \lambda x' = \underbrace{(y + \lambda y')}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{(z + \lambda z')}_{\in \mathrm{G}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(x + \lambda x') = (y + \lambda y') - (z + \lambda z')$$

Donc $\sigma(x + \lambda x') = \sigma(x) + \lambda \sigma(x')$ et σ est une application linéaire. En plus si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, alors $\sigma^2(x) = \sigma(y - z) = y + z = x$. D'où $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Or $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de σ; étant scindé à racines simples on a que σ est diagonalisable avec 1 et -1 comme valeurs propres possibles. Un calcul immédiat montre que F (resp. G) est le sous-espace propre de valeur propre 1 (resp. -1).
Supposons maintenant $\sigma^2 = \mathrm{id}$. On veut montrer que $E = \ker(\sigma - \mathrm{id}) \oplus \ker(\sigma + \mathrm{id})$.

1. Soit $x \in \ker(\sigma - \mathrm{id}) \cap \ker(\sigma + \mathrm{id})$, alors $\sigma(x) = x$ et $\sigma(x) = -x$. Donc $x = 0$.
2. Notons $y = \frac{x+\sigma(x)}{2}$ et $z = \frac{x-\sigma(x)}{2}$. Nous avons $x = y + z$ et

$$\begin{aligned} \sigma(y) = &\ \ \sigma\left(\tfrac{1}{2}(x + \sigma(x))\right) \\ = &\ \ \tfrac{1}{2}(\sigma(x) + \sigma^2(x) = \tfrac{1}{2}(\sigma(x) + x) = y \quad \text{car } \sigma^2 = \mathrm{id} \end{aligned}$$

   Cela montre que $y \in \ker(\sigma - \mathrm{id})$. De la même manière, on montre que $z \in \ker(\sigma + \mathrm{id})$. Donc $E = F + G$.

Nous avons montré que σ est une symétrie où $F = \ker(\sigma - \mathrm{id})$ et $G = \ker(\sigma + \mathrm{id})$

Exercice 10: Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n. On suppose que f admette n valeurs propres distinctes.

1. Pourquoi f est diagonalisable.

2. Si $f \circ g = g \circ f$, montrer que g est diagonalisable et que f et g ont les mêmes vecteurs propres.

Correction : D'après Cayley-Hamilton χ_f est un polynôme annualteur de f. Puisque les valeurs propres de f sont les racines de χ_f, et que $\deg(\chi_f) = n$, nous avons un polynôme annulateur de f qui est scindé à racines simples. Donc f est diagonalisable.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes de f. Puisque f est diagonalisable on a $(n =) \dim E = \sum_{i=1}^{n} E_{f,\lambda_i}$. Chaque sous-espace propre de f étant de dimension ≥ 1, on déduit que E_{f,λ_i} sont de dimension 1. Soit $v \neq 0$ un vecteur propre de f de valeur propre λ_i

$$f(g(v)) = f \circ g(v) = g \circ f(v) = g(f(v)) = g(\lambda_i v) = \lambda_i g(v)$$

Donc $g(v)$ est un vecteur propre de f de valeur propre λ_i. Mais E_{f,λ_i} étant de dimension 1 est engendré par le vecteur v : il existe μ tel que $g(v) = \mu v$; v est aussi vecteur propre de g.

Exercice 11: Supposons f est diagonalisable et $F \subset E$ un sous-espace f-stable. Notons g la restriction de f à F. Montrer que g est diagonalisable.
Correction : On rappelle que $g : F \to F$ est défini par

$$\forall v \in F \quad \text{alors} \quad g(v) = f(v)$$

Nous avons donc que pour tout vecteur $v \in F$, $\mu_f(g)(v) = \mu_f(f)(v) = 0$. On déduit $\mu_f(g) = 0$. Puisque f est diagonalisable, μ_f est scindé à racine simples. Or μ_f est un polynôme scindé à racines simples qui est aussi un polynôme annulateur de g; d'où g est diagonalisable.

Exercice 12: Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ déterminée par sa matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. En déduire tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f

Correction : $\chi_M(X) = \det(M - XI_3)$.

$$\begin{aligned}
\chi_M(X) = \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ -1 & 1 & 1-X \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 1 & 1-X & X \\ -1 & 1 & -X \end{pmatrix} \quad \text{où on a remplacé } c_3 \text{ par } c_3 - c_2 \\
&= \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 0 & 2-X & 0 \\ -1 & 1 & -X \end{pmatrix} \quad \text{où on a remplacé } l_2 \text{ par } l_2 + l_3 \\
= -X(X-1)(X-2)
\end{aligned}$$

D'après l'exercice précédent si F est un sous-espace f-stable, alors la restriction de f à F est diagonalisable et donc F est engendré par les vecteurs propres de f. Réciproquement si F est engendré par les vecteurs propres de f, alors il est f-stable.
On a trouvé les valeurs propres de f: 0, 1 et 2. $E_0 = vect\{(0,1,-1)\}$, $E_1 = vect\{(1,1,-1)\}$ et $E_{-1} = vect\{(1,1,0)\}$. Donc les sous-espaces f-stables sont : *i)* $F = \{(0,0,0)\}$; *ii)* la droite vectorielle E_0 ; *iii)* la droite vectorielle E_1 ; *iv)* la droite vectorielle E_{-1} ; *v)* $G = vect\{(0,1,-1),(1,1,-1)\}$ le plan d'équation $y+z=0$; *vi)* $H = vect\{(0,1,-1),(1,1,0)\}$ le plan d'équation $x-y-z=0$; *vii)* $K = vect\{(1,1,-1),(1,1,0)\}$ le plan d'équation $x-y=0$ et *viii)* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13: Supposons f et g deux endomorphismes diagonalisables de E et $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que tout sous-espace propre de f est g-stable.
2. En déduire que f et g sont simultanément diagonalisables. C-à-d E admet une base des vecteurs propres de f et de g.

Correction : Soit λ une valeur propre de g et $v \in E_{f,\lambda}$, alors $f(g(v)) = g(f(v)) = \lambda g(v)$. Autrement dit $g(v) \in E_{f,\lambda}$. On a montré que $E_{f,\lambda}$ est g-stable. D'après l'exercice 11, la restriction de g à $E_{f,\lambda}$ est diagonalisable. Donc il existe une base $\mathcal{B}_\lambda$ de $E_{f,\lambda}$ des vecteurs propres de g (NB: les éléments de $\mathcal{B}_\lambda$ sont les vecteurs propres de f de valeur propre λ). $\mathcal{B} = \cup_\lambda \mathcal{B}_\lambda$, où la réunion est sur les valeurs propres de f, est une base de E des vecteurs propres de f et de g à la fois.

Exercice 14: Soit E un espace vectoriel complexe et $f : E \to E$ une application linéaire. Supposons f d'ordre fini. Montrer que f est diagonalisable. Ce résultat est toujours valable si le corps de base n'est pas $\mathbb{C}$.

Correction : f est d'ordre fini. C'est à dire qu'il existe un k telle que $f^k = \mathrm{id}_E$. Donc $X^k - 1$ est un polynôme annulateur de f. Mais les racines de ce polynôme sont les racines k-ième de l'unité donc distinctes. $X^k - 1$ est scindé à racines simples.

Exercice 15: Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel complexe E de dimension finie.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 est diagonalisable et $\ker f = \ker f^2$.
2. Par un exemple (matrice de taille 2), montrer que si f^2 est diagonalisable, f n'est pas nécessairement diagonalisable.
3. Montrer que si f^2 est diagonalisable et si $\ker f = \ker f^2$ alors f est diagonalisable.

Correction : Supposons f diagonalisable. Alors il existe une base de E des vecteurs propres de f. Notons cette base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ avec $f(v_i) = \lambda_i v_i$ où $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, k$ et $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ (autrement dit $\ker f = vect\{v_{k+1}, \ldots v_n\}$). Alors, un calcul montre que $f^2(v_i) = \lambda^2 v_i$ et donc f est diagonalisable avec $\mathcal{B}$ une base de diagonalisation pour f^2 aussi. L'inclusion $\ker f \subset \ker f^2$ est évidente.

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in \ker f^2 \Longrightarrow f^2(v) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 a_i v_i = 0$$

Mais $\{v_1, \ldots v_k\}$ est une famille libre, donc $\lambda_i^2 a_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, k$ et on a $v = \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i$. Puisque $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$, on déduit que $f(v) = 0$, et $\ker f^2 \subset \ker f$.
Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. On voit que A n'est pas diagonalisable, mais $A^2 = 0$ donc diagonalisable.
f^2 étant diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples. Notons $\mu_{f^2}(X) = X(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_l)$, où les λ_i sont non nuls et deux à deux distincts. On a $f^2 \circ (f^2 - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (f^2 - \lambda_l \mathrm{id}_E) = 0$

$$\begin{aligned}
\forall v \in E\ f^2\big((f^2 - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (f^2 - \lambda_l \mathrm{id}_E)(v)\big) = 0 \quad &\Longrightarrow \forall v \in E\ (f^2 - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (f^2 - \lambda_l \mathrm{id}_E)(v) \in \ker f^2 \\
\text{utilisant l'hypothèse} \quad &\Longrightarrow \forall v \in E\ (f^2 - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (f^2 - \lambda_l \mathrm{id}_E(v) \in \ker f \\
&\Longrightarrow \forall v \in E\ f\big((f^2 - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (f^2 - \lambda_l \mathrm{id}_E)(v)\big) \\
&\Longrightarrow f \circ (f^2 - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (f^2 - \lambda_l \mathrm{id}_E) = 0
\end{aligned}$$

$$f \circ (f^2 - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (f^2 - \lambda_l \mathrm{id}_E) = 0 \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} P(X) = X(X^2 - \lambda_1) \cdots (X^2 - \lambda_l) \\ \text{est un polynôme annulateur de } f \end{array}$$

En observant que $P(X) = X \prod_{i=1}^{l} (X - \sqrt{\lambda_i})(X + \sqrt{\lambda_i})$, on voit que $P(X)$ est scindé à racines simples et puisque c'est un polynôme annulateur de f, on obtient que f est diagonalisable. □

Exercice 16: Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Sans calculs, dire pourquoi f est diagonalisable dans une b.o.n.
2. Montrer que f est orthogonal. En déduire les seuls valeurs propres possibles pour f.
3. Sans calculer le polynôme caractéristique de f, déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de f. En déduire le polynôme caractéristique de f.
4. Donner une b.o.n. dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Correction : La base canonique est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel C-à-d

$$\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ \sum_{i=1}^{n} y_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Puisque la matrice de f dans une b.o.n est symétrique, on déduit que f est diagonalisable dans une b.o.n.
En calculant ${}^tAA = I_4$, on obtient que A est une matrice orthogonale. Les seules valeurs propres réelles d'une matrice orthogonale sont ± 1.
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les valeurs propres. Alors on a que

1. $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i$ est la trace de la matrice qui est $\frac{1}{7}(-1+5+5+5) = 2$
2. $\lambda_i = \pm 1$

La seule possibilité est que 3 des valeurs propres sont 1 et la dernire est -1 et $\chi_f(X) = (X-1)^3(X+1)$. On calcule les sous-espaces propres :

$$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\} \quad \text{et} \quad E_{-1} = vect \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

En faisant Gram-Schmidt sur une base de diagonalisation, on obtient une b.o.n. par exemple

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_4 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$