Agrégation interne
2016/2017

Dérivation - Formules de Taylor
Développements limités - Convexité

Exercice 1 : (Dantzer p.109) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ sauf peut-être en un point $c \in]a, b[$. Si f' admet une limite l lorsque x tend vers c, montrer que f est dérivable en c et que $f'(c) = l$.

Exercice 2 : Théorème de Darboux (Gourdon p.76)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. On veut montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est à dire que $f'(I)$ est un intervalle. Il faut donc montrer :

$$\forall (a, b) \in I^2,\ a < b,\ \forall y \text{ compris entre } f'(a) \text{ et } f'(b),\ \exists c \in [a, b],\ y = f'(c)$$

On va obtenir ce résultat par deux méthodes différentes.

1. Première méthode. On considère les deux applications

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}\ \varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ si } x \neq a,\ \varphi(a) = f'(a)$$

   et

$$\psi : [a, b] \to \mathbb{R}\ \psi(x) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \text{ si } x \neq b,\ \psi(b) = f'(b)$$

   Montrer que $y \in \varphi([a, b]) \cup \psi([a, b])$. En déduire l'existence ce $c \in [a, b]$ tel que $y = f'(c)$.
2. Deuxième méthode.
   (a) Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable vérifiant $g'(a) \geq 0$ et $g'(b) \leq 0$. Montrer l'existence ce $c \in [a, b]$ tel que $g'(c) = 0$.
   (b) En déduire l'existence ce $c \in [a, b]$ tel que $y = f'(c)$.

Exercice 3 : (Gourdon p.102) Soit $f; [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f'(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1]$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

Exercice 4 : Montrer que le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis sont faux lorsque la fonction est à valeurs dans un espace vectoriel normé.

Exercice 5 : Formule de Simpson (Gourdon p.78)

1. Soit $\alpha > 0$ et $g : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$ une application impaire, 5 fois dérivable sur $[-\alpha, \alpha]$. Montrer : $\exists \theta \in]0, \alpha[,\ g(\alpha) = \dfrac{\alpha}{3}[g'(\alpha) + 2g'(0)] - \dfrac{\alpha^5}{180} g^{(5)}(\theta)$.
   Indication : on pourra utiliser la fonction $\varphi : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) - \frac{t}{3}[g'(t) + 2g'(0)] + \frac{At^5}{180}$, la constante A étant choisie telle que $\varphi(\alpha) = 0$.
2. Soient $a, b, \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^5 sur $[a, b]$. Montrer $\exists \theta \in]a, b[,\ f(b) - f(a) = \dfrac{b - a}{6}[f'(a) + f'(b) + 4f'(\dfrac{b - a}{2})] - \dfrac{(b - a)^5}{2880} f^{(5)}(\theta)$.
3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la subdivision $a = x_0 < x_1, \ldots < x_{2n} = b$ telle que $x_i = a + i\frac{b-a}{2n}$ pour tout i. Si $M = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$, montrer $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - \dfrac{b - a}{6n}[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) \ldots\ldots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(b)] \right| \leq \dfrac{(b - a)^5}{n^4} . \dfrac{M}{2880}$

Exercice 6 : (Monier p. 103) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 3$.

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(\frac{x}{2}+3) = \frac{f(x)}{2}+3$.
2. En déduire que f' est constante.
3. Déterminer f.

Exercice 7 : (Gourdon p.74) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable en 0 et nulle en 0. Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{ln} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 8 : (Auliac - Caby p.98) Soit f une fonction réelle continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Démontrer l'existence d'un nombre réel $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9 : (Auliac - Caby p.97) : Formule des accroissements finis généralisés.

1. Soient f et g deux fonctions réelles continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose de plus que $g(a) \neq g(b)$ et que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Prouver qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
   Indication : Utiliser une fonction ϕ de la forme $\phi(t) = \lambda f(t) + \mu g(t)$ avec λ et μ choisis pour pouvoir appliquer le théorème de Rolle.
2. A l'aide de la question précédente, montrer la règle de L'Hospital :
   Si $f(a) = g(a) = 0$ et si $l = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x)/g'(x)$ existe, alors on a $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)/g(x) = l$.

Exercice 10 : (Auliac - Caby p.89)

1. Montrer que pour $x \in]0, +\infty[,\ \exists\theta \in]0, 1[,\ \mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!}\mathrm{ch}(\theta x)$
2. Montrer que pour x donné, le nombre θ est unique.
3. On a donc défini une application, notée encore θ, de $]0, +\infty[$ dans $]0, 1[$. Déterminer la limite en 0^+ de θ.

Exercice 11 : (Auliac - Caby p.88) Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$. On considère la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 : (Kaczor - Nowak p.147) Prouver que si $f''(x)$ existe, alors

1. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x)$,
2. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} = f''(x)$.

Exercice 13 : (Auliac - Caby p.90) Soit f une fonction réelle de classe C^2 sur un segment $[a, b]$ avec f'' dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)\frac{f'(b) + f'(a)}{2} - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c)$$

Exercice 14 : (Auliac - Caby p.91 et Kaczor - Nowak p.148)

1. Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Si $x \in I$ et $h > 0$ sont tels que $x + h \in I$ et $x - h \in I$, montrer qu'il existe deux nombres réels θ et ρ appartenent à $]0, 1[$ vérifiant
$$f'(x) = \frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h)) - \frac{h}{4}(f''(x+\theta h) - f''(x-\rho h))$$
2. Ici $I = \mathbb{R}$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. Démontrer qu'il en est de même pour f' et qu'en notant $M_i = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(i)}(x)|$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$, on a l'inégalité $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

3. On suppose que f est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $p \geq 2$. On pose

$$M_k = \sup \left\{ |f^{(k)}(x)| : x \in \mathbb{R} \right\} < +\infty, \ k = 0, 1, \dots, p$$

Prouver que $M_k \leq 2^{\frac{k(p-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{p}} M_p^{\frac{k}{p}}$ pour $k = 1, 2, \dots p-1$.

Exercice 15 : (Tissier - Mialet p.305) Soit $\lambda \in]0,1]$. On cherche à déterminer toutes les fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \int_0^{\lambda x} f(t)\,dt$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ et calculer ses dérivées à l'aide de f.
2. Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à f à l'ordre n entre 0 et x. Conclure.

Exercice 16 : Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x^{-2}) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable mais n'est pas lipschitzienne.

Exercice 17 : (Gourdon p.74) Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \geq 0, \ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$
2. $\forall x \geq 0, \ x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$
3. $\forall x \geq 0, \ 1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

Exercice 18 : (Monier p.101) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $g_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ g_n(x) = x^{n-1} f(\frac{1}{x})$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ g_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}(\frac{1}{x})$

Exercice 19 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que f est continue à l'origine si, et seulement si, elle admet un développement limité d'ordre 0 à l'origine ; montrer que f est dérivable à l'origine si, et seulement si, elle admet un développement limité d'ordre 1 à l'origine.
2. Soit $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c + x^3 \cos(\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ c & \text{sinon} \end{cases}$ Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 sans être deux fois dérivable en 0.

Exercice 20 : On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} + \cos x & \text{si } x > 0 \\ \cos x & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que f n'est pas paire mais que tous ses développements limités à l'origine sont sans termes de degré impair.

Exercice 21 : (Gourdon p.89 et suivantes)

1. Calculer le développment limité d'ordre 4 à l'origine de l'application $x \mapsto \ln(\frac{\sin x}{x})$.
2. Calculer le développement limité d'ordre 4 au voisinage de 1 de l'application $x \mapsto x^{\frac{1}{-1+\ln x}}$.
3. Calculer le développement au voisinage de $+\infty$ de l'aplication $x \mapsto (x^3+x)^{1/3} - (x^3-x)^{1/3}$.
4. Donner la limite lorsque x tend vers 0^+ de $\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$.
5. Donner la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^{1/x}$.

Exercice 22 : (Auliac - Caby p.111) Soit la fonction f définie par $f(x) = -1 + \frac{e^x - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Prouver que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle contenant 0.
2. Trouver le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f^{-1}(x)$.

Exercice 23 : (Dantzer p.95) On considère deux applications f et g définies sur un intervalle I, à valeurs dans un espace préhilbertien réel E. Soit $t_0 \in I$.

1. On suppose f et g dérivables en t_0. Montrer que l'application $S : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \langle f(t), g(t) \rangle \end{array} \right.$ est dérivable en t_0 et donner la dérivée de S en ce point.
2. On suppose f dérivable en t_0 avec $f(t_0) \neq 0$. Montrer que l'application $N : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & \|f(t)\| \end{array} \right.$ est dérivable en t_0 et donner la dérivée de N en ce point.

Exercice 24 : (Auliac - Caby p.123) Montrer que toute fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante. Ce résultat subsiste-t-il si une fonction est convexe et majorée sur un intervalle quelconque ?

Exercice 25 : (Auliac - Caby p.125) Soit f une fonction convexe sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite (éventuellement égale à $+\infty$) pour $x \to +\infty$.
2. Dans le cas où $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ avec $a \in \mathbb{R}$, montrer que $x \mapsto f(x) - ax$ admet une limite (éventuellement égale à $-\infty$) pour $x \to +\infty$.

Exercice 26 : (Tissier - Miallet p. 266) Soit f une application continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et *mid-convexe*, i.e. telle que

$$\forall (x, y) \in I^2,\ f\big(\frac{x+y}{2}\big) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$$

1. Montrer que
$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [0, 2^p] \cap \mathbb{N},\ f\big(\frac{k}{2^p}x + (1 - \frac{k}{2^p})y\big) \leq \frac{k}{2^p}f(x) + (1 - \frac{k}{2^p})f(y)$$
Indication : faire une récurrence sur p et distinguer les cas où k est pair et où k est impair.
2. Montrer que $\forall \lambda \in [0, 1],\ \forall p \in \mathbb{N},\ \exists \lambda_p \in \mathbb{N},\ |\lambda - \frac{\lambda_p}{2^p}| \leq \frac{1}{2^p}$.
3. Montrer que f est convexe.

Exercice 27 : (Auliac - Caby p.131) Soient I un intervalle ouvert et f une fonction réelle dérivable sur I.

1. Montrer que f est convexe sur I si et seulement si
$$\forall x \in I,\ \forall x \in I,\ f(a) + f'(a)(x - a) \leq f(x) \quad (1)$$
2. En déduire qu'une fonction convexe et dérivable sur I admet un minimum en $x_0 \in I$ si, et seulement si, $f'(x_0) = 0$.

Exercice 28 : (Auliac - Caby p.128)

1. Montrer que l'application $t \mapsto \ln(1 + e^t)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que si $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont des réels strictement positifs ($n \geq 1$), on a
$$(a_1 \ldots a_n)^{1/n} + (b_1 \ldots b_n)^{1/n} \leq \big((a_1 + b_1) \ldots (a_n + b_n)\big)^{1/n}$$

Exercice 29 : (Kaczor - Nowak p.154) Prouver que si $a > 1$ et $x_1, \ldots x_n\,]0, 1[$ sont tels que $x_1 + \ldots + x_n = 1$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^a \geq \frac{(n^2 + 1)^a}{n^{a-1}}$$

Bibliographie :

- G. Auliac et J.Y. Caby : Exercices corrigés d'Analyse pour le Capes et l'Agrégation interne
- J.F. Dantzer : Mathématiques pour l'agrégation interne : Analyse et Probabilités
- J.M. Monier : Analyse MPSI Editions 2000
- A. Tissier et J.N. Mialet : Analyse à une variable réelle
- X. Gourdon : Les Mathématiques en tête Analyse
- W.J. Kaczor et M.T. Nowak (Traduction E. Kouris) : Problèmes d'Analyse II - Continuité et dérivabilité - Exercices corrigés - EDP Sciences.