Centrale TSI 2011 - Math 2

I Préliminaires - endomorphismes nilpotents, trace d'un endomorphisme

I.A.

I.A.1) On sait que :

- f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0\}$
- 0 est valeur propre si et seulement si $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f - 0id) \neq \{0\}$

Donc :

$$\boxed{0 \notin Sp(f) \Leftrightarrow f \text{ injective.}}$$

I.A.2) E est dimension finie, donc f est injective si et seulement si f est bijective. Donc :

$$\boxed{0 \notin Sp(f) \Leftrightarrow f \in GL(E).}$$

I.A.3) Traduction matriciel de la propriété précédente.

$$\boxed{M \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow 0 \notin Sp(M).}$$

I.B.

I.B.1) $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. Donc :

$$\boxed{N \text{ est nilpotente et } k(N) = 3.}$$

I.B.2)

a) Comme M en N sont semblables, il existe P inversible telle que $M = PNP^{-1}$.
On a alors $\forall p \in \mathbb{N},\ M^p = PN^pP^{-1}$. Donc :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ M^p \text{ et } N^p \text{ sont semblables}}$$

b) On a donc : $\forall p \in \mathbb{N},\ M^p = 0 \Leftrightarrow N^p = 0.$ et donc $\min(p, M^p = 0) = \min(p, N^p = 0)$

$$\boxed{M \ \text{ est nilpotente et } k(M) = k(N)}$$

I.B.3) $Mat_B(f)$ et $Mat_{B'}(f)$ sont semblables et donc d'après la question précédente :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \text{ est également nilpotente et de même indice de nilpotence que } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

I.B.4)

a) Soient i et $j \in [[1, n]]$ tels que $j \leq i + 1$.

- On a alors pour $i < n$:

$$\begin{aligned} n_{ij}^{(2)} &= \sum_{k=1}^{n} n_{ik}n_{kj} = \sum_{k=i+1}^{n} n_{ik}n_{kj} \text{ car } k < i \Rightarrow n_{ik} = 0 \text{ et } n_{i,i} = 0 \\ &= 0 \text{ car } j \leq i + 1 \leq k \text{ et donc } n_{k,j} = 0 \end{aligned}$$

- et pour $i = n$: $n_{ij}^{(2)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} n_{ik}n_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 0$ car pour tout k : $k \leq i = n$

$$\boxed{n_{ij}^{(2)} = 0 \text{ si } j \leq i + 1 \text{ et en particulier } N^2 \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})}$$

.

b) Montrons par récurrence : $H_k : j \leq i + k - 1 \Rightarrow\ n_{ij}^{(k)} = 0.$

- vrai pour $k = 0$ car $N^0 = I$
- vrai pour $k = 1$ par hypothèse sur N
- vrai pour $k = 2$ d'après le **a)**.
- Supposons la propriété vraie au rang k :

On a alors pour $j \leq i+k$:

$$n_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{n} n_{il}^{(k)} n_{lj} = \sum_{l=1}^{n} 0 = 0$$

car :

- Si $i+k > n$, alors $l \leq n \leq i+k-1$ et $n_{ij}^{(k)} = 0$
- Si $i+k \leq n$,alors
  - pour $l \leq i+k-1$, $n_{il}^{(k)} = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence
  - pour $l > i+k-1$, $l \geq j$ et donc $n_{l,j} = 0$
- La propriété est donc vraie au rang $k+1$ et

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ N^k \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \text{ et } n_{ij}^{(k)} = 0 \text{ si } j \leq i+k-1}$$

c)Pour $k = n$, on a : $j \leq n = 1+k-1 \leq i+k-1$. Donc $n_{ij}^{(n)} = 0$ pour tous les coefficients de N^n et donc :

$$\boxed{N^n = 0 \text{ et } N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) \text{ et } k(N) \leq n}$$

I.B.5) Le sujet nous rappelle que comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme est trigonalisable.
a) N est triangulaire donc aussi $N - \lambda I$:
$P_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (n_{ii} - \lambda)$. Donc :

$$\boxed{Sp(f) = \{n_{i,i}, i \in [[1,n]]\}}$$

b)

- Si f est nilpotente il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \widetilde{0}$. X^k est donc un polynôme annulateur et donc $Sp(f) \subset \{0\}$. De plus f est nilpotente, donc n'est pas injective et donc admet 0 comme valeur propre et donc

$$\boxed{Sp(f) \subset \{0\}}$$

- Si pour tout i , $n_{i,i} = 0$,N est nilpotente d'après la question **B.4**

$$\boxed{f \text{ nilpotent} \Leftrightarrow Sp(f) = \{0\}}$$

I.B.6) Soit $N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$. D'après I.B.5., N est nilpotente si et seulement si $\{n_{i,i}, i \in [[1,n]]\} = Sp(N) = \{0\}$.

$$\boxed{N \text{ est nilpotente} \Leftrightarrow \forall i \in [[1,n]],\ n_{ii} = 0}$$

I.C.
I.C.1) les deux matrices $Mat_B(f)$ et $Mat_{B'}(f)$ sont semblables .
Elles ont donc même trace car $Tr(PMP^{-1}) = Tr(P\left(MP^{-1}\right)) = Tr((MP^{-1})P) = Tr(M)$.
Donc :

$$\boxed{Tr(Mat_{\mathcal{B}}(f)) \text{ est indépendant de } \mathcal{B}}$$

I.C.2)
On trigonalise f dans une base $\mathcal{B}$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$.
On a alors $Sp(f) = \{n_{i,i}, i \in [[1,n]]\} = \{\lambda_k, k \in [[1,n]]\}$. Donc :

$$\boxed{Tr(f) = \sum_{i=1}^{n} n_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k}$$

I.C.3)
Comme $Tr(A) = 0$, A admet deux valeurs propres opposées.

- Si elles sont non nulles, elles sont distinctes et A est diagonalisable.
- Si elles sont nulles, d'après la question **I.B.5.**, B est nilpotente et donc d'après **I.B.2.** , A l'est aussi.

$$\boxed{A \text{ est soit diagonalisable, soit nilpotente}}$$

I.C.4)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

A n'est pas nilpotente car elle est triangulaire supérieure et que l'un des coefficients diagonaux est non nul.
Ses valeurs propres sont 1 (double) et 0 (simple).

$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 . Le noyau (le sous espace propre) est donc de dimension 1 alors que la valeur propre est d'ordre de multiplicité 2. Donc A n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{\text{Lorsque } n = 3, \text{ il existe des matrices ni diagonalisables, ni nilpotentes}}$$

N'importe quelle réduite de Jordan (cf TD Maple) non diagonale et de trace nulle donnera un contre exemple.

II Exponentielle d'un endomorphisme

II.A.
II.A.1)
a)

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}}$$

b) $\exp(f)$ a une matrice diagonale, n'ayant que des termes diagonaux non nuls donc :

$$\boxed{\exp(f) \in GL(E)}$$

II.A.2)
Soit f l'endomorphisme de E de matrice M dans la base $\mathcal{B}$.
Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ les bases de E telles que $P_1 = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1)$ et $P_2 = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_2)$
Alors, comme $M = P_1 D_1 P_1^{-1}$ et $M = P_2 D_2 P_2^{-1}$, les changements de base donne : $Mat_{\mathcal{B}_1}(f) = D_1$ et $Mat_{\mathcal{B}_2}(f) = D_2$; ces matrices étant diagonales, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases de vecteurs propres de f.
D'où, d'après la propriété admise au **II.A.1)** $Mat_{\mathcal{B}_1}(\exp(f)) = \exp(D_1)$ et $Mat_{\mathcal{B}_2}(\exp(f)) = \exp(D_2)$ et le changement de base donne $Mat_{\mathcal{B}}(\exp(f)) = P_1 \exp(D_1) P_1^{-1}$ et $Mat_{\mathcal{B}}(\exp(f)) = P_2 \exp(D_2) P_2^{-1}$. Soit :

$$\boxed{P_1(\exp D_1)P_1^{-1} = P_2 \exp(D_2) P_2^{-1}}$$

II.B.
II.B.1) D'après la question **I.B.4.a)**, pour $k \geq 1$, M^k est triangulaire supérieure et ses termes diagonaux sont nuls . Les termes diagonaux de $\exp(M) = \displaystyle\sum_{p=0}^{k(f)-1} \frac{M^p}{p!}$ sont ceux de $\dfrac{M^0}{0!} = I_n$.

$$\boxed{\text{Les termes diagonaux de } \exp(M) \text{ sont donc tous égaux à } 1}$$

II.B.2) $\exp(M)$ est une somme de matrice triangulaires supérieures donc est triangulaire supérieure. Donc ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux..

$$\boxed{Sp(\exp f) = \{1\} \text{ (valeur propre de multiplicité } n)}$$

Comme $\det(\exp(f)) = 1$ (produit des valeurs propres),

$$\boxed{\exp(f) \in GL(E)}$$

II.C.
II.C.1)

a) g est nilpotente donc $\exp(g) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k(g)-1} \frac{g^i}{i!}$. Pour avoir $\exp(d) \circ \exp(g) = \exp(g) \circ \exp(d)$ il suffit donc d'avoir pour tout i $\exp(d) \circ g^i = g^i \circ \exp(d)$.

On calcule l'image d'un vecteur de E en le décomposant sur la somme directe des sous espace propres . (possible car d est diagonalisable .

$$x = \sum_{j=1}^{m} x_j \text{ avec pour tout } j \; d(x_j) = \lambda_j x_j$$

Par définition de $\exp(d)$ on a :

$$\begin{cases} \text{si } x_j = 0 \text{ , } \exp(d)(x_j) = 0 \exp(\lambda_j) x_j \\ \text{si } x_j \neq 0 \text{ , } \exp(d)(x_j) = \exp(\lambda_j) x_j \text{ par définition de } \exp(d) \text{ et indépendance de la base de vecteurs propres utilisés.} \end{cases}$$

$$\exp(d)\,(x) = \sum_{j=1}^{m} \exp(\lambda_j)\, x_j \text{ et } (g \circ \exp d)\,(x) = \sum_{j=1}^{m} \exp(\lambda_j)\, g(x_j)$$

On a aussi $g(x) = \sum_{j=1}^{m} g(x_j)$. Seulement d et g commutent donc les sous espaces propres de d sont stables par g et donc $g(x_j)$ est soit nul , soit un vecteur propre de d et donc $\exp(d)(g(x_j)) = \exp(\lambda_j) d(x_j)$; On a donc

$$(\exp(d) \circ g)(x) = \sum_{j=1}^{m} \exp(\lambda_j)\, g(x_j) \; = (g \circ \exp d)\,(x)$$

b) On prend f telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = M$. si $M = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente , on prend d et g de matrice Det N . d est un endomorphisme diagonalisable et g est un endomorphisme nilpotent. d'après le résultat admis d et g sont uniques. Donc aussi D et N

$$\boxed{\forall M \in \Gamma_n(\mathbb{C}) \text{ , } \exists!\,(D, N)}$$

II.C.2)

On décompose $M = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente. On a alors $PMP^{-1} = PDP^{-1} + PNP^{-1}$ avec:

- PDP^{-1} diagonalisable : si D est semblable à Δ diagonale , PDP^{-1} est semblable à D donc à Δ.
- PNP^{-1} nilpotente d'après la question **I.B.2**.
- $(PDP^{-1})(PNP^{-1}) = (PNP^{-1})(PDP^{-1})$ car $DN = ND$ et PP^{-1} se simplifie.

Donc

$$\boxed{PMP^{-1} \in \Gamma_n(\mathbb{C})}$$

On a par définition $\exp(PMP^{-1}) = \exp(PDP^{-1}).\exp\left(PNP^{-1}\right)$.

- $\exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}$ car si on pose $D = Q\Delta Q^{-1}$ on a $PDP^{-1} = (PQ)\,\Delta(PQ)^{-1}$ avec Δ diagonale .

  Par définition (cf **II.A.2**) de l'exponentielle d'une matrice diagonale $\exp(D) = Q\exp(\Delta)Q^{-1}$ et $\exp(PDP^{-1}) = (PQ)\exp(\Delta)\,(PQ$ soit $\exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}$
- et $\exp(PNP^{-1}) = P\exp(N)P^{-1}$ car

$$\begin{aligned} \exp(PNP^{-1}) &= \sum_{p=0}^{k(PNP^{-1})-1} \frac{(PNP^{-1})^p}{p!} = \sum_{p=0}^{k(N)-1} \frac{PN^pP^{-1}}{p!} \\ &= = P\left(\sum_{p=0}^{k(N)-1} \frac{N^p}{p!}\right) P^{-1} = P\exp(N)P^{-1} \end{aligned}$$

  en utilisant le fait que N et PNP^{-1} on même indice de nilpotence d'après **I.B.2)**

D'où :

$$\begin{aligned} \exp(PMP^{-1}) &= \exp(PDP^{-1}).\exp\left(PNP^{-1}\right) = \left(P\exp(D)P^{-1}\right)\left(P\exp(N)P^{-1}\right) \\ &= P\left(\exp(D)\exp(N)\right)P^{-1} = P\exp(M)P^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\exp(PMP^{-1}) = P\exp(M)P^{-1}}$$

III Le cas $n = 2$

III.A.

III.A.1) Si f n'est pas diagonalisable la somme des dimension des sous espaces propres est plus grande que 1 (le corps est $\mathbb{C}$) est strictement plus petite que 2.On a donc un seul sous espace propre de dimension 1 :

$$\boxed{\lambda = \mu \text{ et } \dim(E_\lambda) = 1}$$

La seule valeur propre de $f - \lambda Id$ est donc 0 il existe donc une base de E dans laquelle la matrice de $f - \lambda Id$ est triangulaire à diagonale nulle et donc d'après la question **I.B.4)**.

$$\boxed{(f - \lambda Id)^2 = 0}$$

I.B.5.a) me semble peu adapté.

III.A.2) Puisque $f(v) \neq \lambda v$, $u \neq 0$ et comme $(f - \lambda Id)^2 = 0$, $(f - \lambda Id)(u) = (f - \lambda Id)^2(v) = 0$. donc $f(u) = \lambda u$

$$\boxed{u \in E_\lambda \setminus \{0\}}$$

$E_\lambda(f)$ est donc la droite engendrée par u . comme $v \notin \mathrm{Vect}(u)$ on a (u, v) libre , et (u, v) de bon cardinal.

$$\boxed{(u, v) \text{ est une base de } E}$$

On a alors $f(u) = \lambda u$ et $f(v) = u + \lambda v$ (par définition de u). Donc :

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}$$

III.B. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.Si A est diagonalisable, A est semblable à une matrice du type $D(a, b)$.

- Si A n'est pas diagonalisable, A est la matrice d'un endomorphisme f non diagonalisable. Donc d'après la question précédente f admet dans la base (u, v) la matrice $M(\lambda)$ donc A est semblable à $M(\lambda)$

$$\boxed{\text{Tout élément de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice de } J_2(\mathbb{C})}$$

III.C.

- $\forall a, b \in \mathbb{C},\ D(a, b) = D(a, b) + N$ avec $N = 0$, donc N est nilpotente et $ND(a, b) = D(a, b)N$: $D(a, b) \in \Gamma_2(\mathbb{C})$.

  et $\exp(D(a, b)) = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$par définition de l'exponentielle d'une matrice diagonale.

- $\forall a \in \mathbb{C},\ M(a) = aI_2 + N$ avec aI_2 diagonale ,$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente et $(aI_2)N = N(aI_2)$.$M(a) \in \Gamma_2(\mathbb{C})$

  Comme $N^2 = 0$, $\exp(N) = I_2 + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

$$\exp(M(a)) = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$$

$$\boxed{J_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C}).}$$

III.D. On a par définition : $\Gamma_2(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Réciproquement si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. M est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$, donc de $\Gamma_2(\mathbb{C})$. D'où d'après **II.C.2)**, $M \in \Gamma_2(\mathbb{C})$. D'où :

$$\boxed{\Gamma_2(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$$

III.E.

III.E.1) Le polynôme caractéristique de $A(\theta)$ est $P_{A(\theta)}(\lambda) = \lambda^2 + \theta^2$ et donc $Sp(A(\theta)) = \{i\theta, -i\theta\}$.
Ses deux valeurs propres sont distinctes (car $\theta \neq 0$) , $A(\theta)$ est diagonalisable. Ses deux sous-espaces propres sont des droites et :

- $E_{i\theta}(A(\theta))$ d'équation $\left\{ \begin{array}{l} -i\theta x - \theta y = 0 \\ \theta x - i\theta y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = -ix$ (car $\theta \neq 0$) , d'où $E_{i\theta}(A(\theta)) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

- $E_{-i\theta}(A(\theta)) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

- D'où les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}$ de la décomposition $A(\theta) = PDP^{-1}$.

Le calcul donne $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$

On alors :

$$\begin{aligned} \exp\left(A\left(\theta\right)\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\exp(A(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

est la matrice de la rotation d'angle θ .

III.E.2)

L'on a alors $\exp(A(0)) = \exp(A(2\pi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $A(0) \neq A(2\pi)$, $\boxed{\text{exp n'est pas injective}}$

III.E.3) Une matrice M de $J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$ est de la forme $D(a,b)$ avec $ab \neq 0$ ou $M(a)$ avec $a \neq 0$.

On sait (ou on retrouve) que $z \longmapsto \exp(z)$ est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$. Un antécédent de z étant $\phi(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$

- Si M est de la forme $D(a,b)$ on cherche $\Delta = D(\alpha,\beta)$ un antécédent diagonale de $D(a,b)$. il suffit de prendre $\exp(\alpha) = a$ et $\exp(\beta) = b$

  Donc $D(\phi(a), \phi(b))$ est un antécédent de $D(a,b)$ par exp si a et b sont non nuls.

- Si M est de la forme $M(a)$ on utilise le fait que $\exp(M(\alpha)) = \begin{pmatrix} \exp(\alpha) & \exp(\alpha) \\ 0 & \exp(\alpha) \end{pmatrix}$ n'étant pas diagonalisable est semblable à $\begin{pmatrix} \exp(\alpha) & 1 \\ 0 & \exp(\alpha) \end{pmatrix}$, d'après la question **III.B.**

  On prend donc $\alpha = \phi(a)$ et $M(a)$ est semblable à $\exp(M(\phi(a)))$,

On peut décomposer $\exp(M(\phi(a))) = PM(a)P^{-1}$ et alors $M(a) = P^{-1}\exp(M(\phi(a)))P = \exp\left(P^{-1}M(\phi(a))P\right)$ d'après **II.C.2)**

$$\boxed{\text{Tout élément de } J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à l'exponentielle d'un élément de } J_2(\mathbb{C})}$$

III.E.4) Soit $M \in GL_2(\mathbb{C})$:

- d'après la question **III.B.**, il existe $M_1 \in J_2(\mathbb{C})$ telle que M soit semblable à M_1. Comme M est inversible, M_1 l'est aussi et $M_1 \in J_2(\mathbb{C}) \cap GL_2(\mathbb{C})$.
- d'après la question **III.E.3)**, il existe $M_2 \in J_2(\mathbb{C})$ telle que M_1 soit semblable à $\exp(M_2)$
- d'où M est semblable à $\exp(M_2)$. On peut décomposer $M = P\exp(M_2)P^{-1}$ avec P inversible.
- d'après **II.C.2)**, $M = P(\exp M_2)P^{-1} = \exp(PM_2P^{-1})$.

$$\boxed{\exp\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to GL_2(\mathbb{C}) \text{ est surjective}}$$

III.F. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, M est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C})$.

- Si M est semblable à $D(a,b)$, $Tr(M) = Tr(D(a,b)) = a+b$ et $\exp(M)$ est semblable à $D(e^a, e^b)$; donc $\det(\exp(M)) = e^{a+b} = \exp(T$

- Si M est semblable à $M(a)$, $Tr(M) = Tr(M(a)) = 2a$ et $\exp(M)$ est semblable à $\exp(M(a)) = \begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$; donc $\det(\exp(M)) = e^{2a} = \exp(Tr(M))$.

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ \det(\exp(M)) = \exp(Tr(M))}$$

III.G.
III.G.1)

- $SL_2(\mathbb{C}) \subset GL_2(\mathbb{C})$,(si $M \in SL_2(\mathbb{C})$, $det(M) = 1$)
- $I_2 \in SL_2(\mathbb{C})$
- $SL_2(\mathbb{C})$ est stable par quotient : .Si M et $N \in SL_2(\mathbb{C}),\ \det(MN^{-1}) = \dfrac{\det(M)}{\det(N)} = 1$

$$\boxed{SL_2(\mathbb{C}) \text{ est un sous-groupe de } GL_2(\mathbb{C})}$$

Si $M \in L_0(\mathbb{C}),\ \det(\exp(M)) = \exp(Tr(M)) = 1$, donc $\boxed{\exp(L_0(\mathbb{C})) \subset SL_2(\mathbb{C})}$
III.G.2)
Soit $M \in L_0(\mathbb{C})$.

- d'après I.C.3), M est soit diagonalisable, soit nilpotente.
-
  - si elle est diagonalisable, elle est semblable à une matrice $D(a,b)$ de trace nulle ; donc $b = -a$.
  - si elle est nilpotente et non diagonalisable, elle est semblable d'après la question **III.B**. à une matrice du type $M(a)$ de trace nulle, qui vérifie donc $a = 0$.

III.G.3)
$\det N' = 1$: $\boxed{N' \in SL_2(\mathbb{C}}$
Supposons $N' = \exp(N_1)$ avec $N_1 \in L_0(\mathbb{C})$.
On remarque que N' n'est pas diagonalisable.

- Si N_1 est semblable à une matrice du type $D(a,-a)$, $\exp(N_1)$ est semblable à $\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}$ et N' est diagonalisable . absurde.
- Si N_1 est semblable à $M(0)$, $N' = \exp(N_1)$ est semblable à $\exp(M(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $Tr(N') = 2$, ce qui est évidemment faux.

Donc N' n'appartient pas à l'image de exp donc de $\widetilde{\exp}$. L'application n'est pas surjective.
Par ailleurs, les matrices $A(\theta)$ appartiennent à $L_0(\mathbb{C})$; comme $\exp(A(0)) = \exp(A(2\pi))$ et $A(0) \neq A(2\pi)$, $\widetilde{\exp}$ n'est pas injective. D'où :

$$\boxed{\widetilde{\exp} \text{ n'est ni surjective, ni injective}}$$

IV Le cas $n = 3$

IV.A.
f admet 3 valeurs propres 2 à 2 distinctes; donc f est diagonalisable et s'écrit $f = f + \widetilde{0}$ avec $\widetilde{0}$ nilpotent et $f \circ \widetilde{0} = \widetilde{0} \circ f$ donc :

$$\boxed{f \in \Gamma_3(E).}$$

IV.B.
IV.B.1) $f - \lambda Id$ admet 0 comme unique valeur propre, d'après la question **I.B**.

$$\boxed{f-\lambda Id \text{ est nilpotent}}$$

IV.B.2)
f s'écrit alors $\lambda Id+(f-\lambda Id)$ avec λId diagonalisable, $f-\lambda Id$ nilpotent et $(\lambda Id)\circ(f-\lambda Id)=(f-\lambda Id)\circ(\lambda Id)$:

$$\boxed{f\in\Gamma_3(E).}$$

IV.C.
IV.C.1) Comme f est trigonalisable, il existe une base $B=(e_1,e_2,e_3)$ telle que $Mat_B(f)$ soit triangulaire supérieure. Les valeurs propres de f étant sur la diagonale

$\exists a,b,c\in\mathbb{C},\ \exists(e_1,e_2,e_3)$tels que $Mat_B(f)=\begin{pmatrix}\lambda & a & b\\ 0 & \lambda & c\\ 0 & 0 & \nu\end{pmatrix}$ soit :

$$\boxed{\begin{cases} f(e_1=\lambda e_1\\ f(e_2)=ae_1+\lambda e_2\\ f(e_3)=be_1+ce_2+\nu e_3\end{cases}}$$

IV.C.2)
$\det\limits_B(e_1,e_2,e_3')=\begin{vmatrix}1 & 0 & \alpha\\ 0 & 1 & \beta\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Donc

$$\boxed{B'=(e_1,e_2,e_3') \text{ est une base de } E}$$

IV.C.3)

$$\begin{aligned} f(e_3') &= f(e_3)+\alpha f(e_1)+\beta f(e_2)=(be_1+ce_2+\nu e_3)+(\alpha\lambda e_1)+\beta(ae_1+\lambda e_2)\\ &= (b+\alpha\lambda+\beta a)e_1+(c+\beta\lambda)e_2+\nu e_3\end{aligned}$$

et

$$\nu e_3'=\nu\alpha e_1+\nu\beta e_2+\nu e_3$$

On a donc :

$$f(e_3')=\nu e_3'\Leftrightarrow\begin{cases} b+\alpha\lambda+\beta a=\nu\alpha\\ c+\beta\lambda=\nu\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{ca}{(\nu-\lambda)^2}+\dfrac{b}{\nu-\lambda}\\ \beta=\dfrac{c}{\nu-\lambda}\end{cases}$$

car $\lambda\neq\mu$

$$\boxed{\text{On a donc pu choisir } \alpha \text{ et } \beta \text{ tels que } f(e_3')=\nu e_3'}$$

IV.C.4)
On a alors :

$$\boxed{M=Mat_{B'}(f)=\begin{pmatrix}\lambda & a & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \nu\end{pmatrix}.}$$

IV.C.5)
Soient alors $D=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \nu\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
On a alors $M=D+N$ avec D diagonale et N nilpotente.
De plus $ND=DN=\begin{pmatrix}0 & a\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Donc :

$$\boxed{M\in\Gamma_3(\mathbb{C})}$$

et donc comme M est l matrice de f :

$$\boxed{f\in\Gamma_3(E)}$$

IV.D.
Soit f un endomorphisme de E. On a alors les possibilités (et elles seules) :

- f admet 3 valeurs propres deux à deux distinctes
- f admet 1 valeur propre triple
- f une valeur propre simple et une double

Dans les trois cas les questions **A,B,C** donnent

$$\boxed{\Gamma_3(E) = L(E).}$$

IV.E.
IV.E.1)
Le polynôme caractéristique de $R(\theta)$ vaut :

$$P_{R(\theta)}(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + \theta^2)$$

et $Sp(R(\theta))$ est $\{i\theta, -i\theta, 0\}$.
Par des calculs analogues à ceux de **III.E.1)**, on obtient :
$R(\theta) = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. et $D = \begin{pmatrix} i\theta & 0 & 0 \\ 0 & -i\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
On a alors :

$$\exp(R(\theta)) = P \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.E.2)
Comme $\exp(R(0)) = \exp(R(2\pi))$ et que $R(0) \neq R(2\pi)$,

$$\boxed{\exp : L(E) \to GL(E) \text{ n'est pas injective}}$$