Agrégation interne
2016-2017

Polynômes - Fractions rationnelles

Exercice 1 : (Tauvel p. 115) Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on définit $Q \circ P$ par $Q \circ P(X) = Q(P(X))$. Pour P fixé, on note :

$$\Phi_P : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], Q \to Q \circ P$$

1. Prouver que Ψ_P est injectif si, et seulement si, $\deg P \geq 1$.
2. Prouver que Ψ_P est bijectif si, et seulement si, $\deg P = 1$.
3. Déterminer tous les automorphismes de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 2 : (Burg p.180) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les racines complexes de $P = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. En déduire les racines complexes de $R = P(X+1)$.
2. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{2ki\pi}{n}}}$.

Exercice 3 : (Gourdon p. 64 et Tauvel p. 161)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, le polynôme $P_n = 1 + \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X^2 + \ldots + \frac{1}{n!}X^n$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$, qu'il a une seule racine réelle si n est impair et aucune racine réelle si n est pair.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, le polynôme $P_n = X^n - X + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4 : (Tauvel p. 119) Soit $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Les racines de P forment, dans la plan complexe, un parallélogramme.
2. Il existe $h \in \mathbb{C}$ tel que $P(X+h)$ soit un polynôme bicarré.
3. Les polynômes P' et P''' ont une racine commune.

Exercice 5 : (Tauvel p. 124) Soient $a, b, c \in \mathbb{C}[X]$ tels que $a + b + c = 0$. Etablir : $a^6 + b^6 + c^6 = 3a^2b^2c^2 - 2(ab + bc + ca)^3$.

Exercice 6 : (Monnier p.151) Déterminer l'ensemble des réels p tels que le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + yz + xz = 1 \\ xyz = p \end{cases}$$

admette au moins une solution dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 : (Burg p.181) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg P \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $A = (X-a)(X-b)$ où a et b sont des scalaires donnés.
2. Déterminer le reste lorsque $P = (\sin\theta X + \cos\theta)^n$ et $A = X^2 + 1$.
3. Déterminer le reste lorsque $P = X^{2n} - 2\cos\theta X^n + 1$ et $A = X^2 - 2\cos\theta X + 1$.

Exercice 8 : (Monnier p. 154)

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour que $X^2 + X + 1 | (X^n + 1)^n - X^n$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour que $X^3 - X^2 + X - 1 | (X^2 - X + 1)^n - X^{2n} + X^n - 1$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(n, p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour que $X^8 + X^4 + 1 | X^{8n} + pX^{4n} + q$.

Exercice 9 : (Burg p.181) Soient A, B, C des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux tels que $A^2 = B^2 + C^2$.

1. Montrer que les polynômes A, B, C sont deux à deux premiers entre eux.
2. Montrer que si deux polynômes sont premiers entre eux, alors les polynômes somme et différence sont aussi premiers entre eux.
3. Montrer que $A - B$ et $A + B$ sont des carrés de polynômes.
4. En déduire la forme générale des polynômes A, B, C.

Exercice 10 : (Tauvel p. 134) Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Montrer que $A + B$ et AB sont premiers entre eux.

Exercice 11 : (Monnier p. 146) Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes non nuls. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A et B ne sont pas premiers entre eux.
2. $$\exists (U, V) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^2, \begin{cases} \deg U < \deg B \\ \deg V < \deg A \\ AU + BV = 0 \end{cases}$$

Exercice 12 : (Tauvel p. 143) Soit $P = X^2 + aX + b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P soit irréductible.
2. Déterminer tous les polynômes irréductibles du type précédent.

Exercice 13 : (Tauvel p. 167) Polynômes d'Hermite.
On note $f(x) = \exp(-x^2)$ et $P_n(x) = (-1)^n f^{(n)}(x) \exp(x^2)$. Soit $L = \mathbb{R}[X]$, $L_n = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P, Q \in L$, on pose :

$$(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)f(t)\,dt$$

1. (a) Prouver que $P_n \in L$ et $\deg P_n = n$. Montrer que le terme dominant de P_n est $2^n X^n$. Etudier la parité de P_n.
   (b) Montrer que $(P_n|P_m) = 0$ si $m \neq n$ et que $(P_n|Q) = 0$ si $Q \in L_{n-1}$. Calculer $(P_n|P_n)$.
2. Prouver que si $n \geq 1$, P_n a toutes ses racines réelles et simples.
3. (a) Montrer que $(P_p|P_n') = 0$ si $0 \leq p \leq n-2$.
   (b) En déduire que $P_n' = 2nP_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $P_{n+1} = 2XP_n - 2nP_{n-1}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir : $P_n'' = 2XP'n - 2nP_n$.

Exercice 14 : (Burg p.177, 178 179, 182) Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples dans $\mathbb{R}$:

$$R_1 = \frac{4X^3 + 2X}{X^4 + X^2 + 1},\ R_2 = \frac{1}{X^2(X^2 + X + 1)},\ R_3 = \frac{X^2 + 1}{X^4 + X^2 + 1}$$

Exercice 15 : (Gourdon p.73) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1 = \frac{X^2}{(X^4 + X^2 + 1)^2},\ F_2 = \frac{1}{X(X^2 + 1)^2},\ F_3 = \frac{X^7 + 2}{(X^2 + X + 1)^3},\ F_4 = \frac{1}{X^{2n} - 1}, n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 16 : (Gourdon p.74)

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, tel que $X^n + \frac{1}{X^n} = P_n(X + \frac{1}{X})$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, décomposer la fraction rationnelle $F_n = \frac{1}{P_n}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$.

Bibliographie :

- P. Burg : Algèbre et Géométrie - Capes et Agrégation - Vuibert
- X. Gourdon : Les Mathématiques en tête. Algèbre - Ellipses
- J.M. Monier : Algèbre MPSI - Editions 2006 - Dunod
- P. Tauvel : Exercices d'algèbre générale et d'arithmétique - Agrégation - Dunod