Agrégation interne
2016/2017

Intégrales impropres

Exercice 1 : (Gourdon p.151)
Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$a)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}t-\cos t}{t^{5/2}}\,dt \quad b)\ \int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\big(\cos\frac{1}{t}\big)\,dt \quad c)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}\,dt \quad d)\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,dt,\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

Exercice 2 : (Auliac - Caby p.270)
Calculer les intégrales suivantes après s'être assuré de leur convergence

$$a)\ \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)(t+3)} \quad b)\ \int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})\,dt \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,dt$$

$$d)\ \int_0^1 \frac{1}{t}\big(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-1\big)\,dt$$

Exercice 3 : (Monier Ed.2000 p.230)

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}$ soit convergente.
   Pour $\alpha\in]0,+\infty[$, on note $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$
2. Etablir $\forall\alpha\in]0,+\infty[$, $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$
3. En déduire : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!$

Exercice 4 : (Auliac - Caby p.289)

1. Calculer $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^4+1}$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}}$.

Exercice 5 : (Auliac - Caby p.274)
Montrer que $\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt\sim\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$ quand $x\to+\infty$. *Indication :* Dériver la fonction $t\mapsto\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t}$

Exercice 6 : (Monnier Ed. 2006 p.372)
Pour $\lambda\in\mathbb{C}$, on pose $I(\lambda)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}t^2\,dt$. Quelles sont les valeurs de λ pour lesquelles $I(\lambda)$ est définie ? Pour ces valeurs, calculer $I(\lambda)$.

Exercice 7 : (Règle d'Abel - Dantzer p.226)
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a,b[$ telles que :

1. f est à valeurs réelles positives, décroissante, avec $\lim_{x\to b} f(x)=0$
2. g est a valeurs réelles ou complexes et

$$\exists M>0,\ \forall x\in[a,b[,\ \Big|\int_a^x g(t)\,dt\Big|\leq M$$

Montrer que $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ est convergente.

Exercice 8 : (Kaczor - Nowak p. 29,30,31)

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer : $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$ et $\int_0^1(-\ln x)^n\,dx$.
2. Soit f une fonction monotone sur $]0,1[$ telle que l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\ldots+f(\frac{n-1}{n})}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx$$

3. Calculer :
   (a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}$.
   (c) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln k)\right)^2\right)$.

Exercice 9 : (Dantzer p.226)

1. Pour quelles valeurs du réel $\alpha > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ est-elle convergente ?
2. Pour quelles valeurs du réel $\alpha > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t^\alpha}\,dt$ est-elle convergente ?
3. Pour quelles valeurs du réel $\alpha > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{it}}{t^\alpha}\,dt$ est-elle convergente ?
4. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt$ est divergente.
5. En déduire que l'intégrale $\alpha > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ n'est pas absolument convergente.
6. Donner la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)\,dt$.

Exercice 10 : (Kaczor - Nowak p. 34) Pour $\alpha > 0$, étudier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\,dx$$

Exercice 11 : (Dantzer p.234)
On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{ix^3}$.

1. Vérifier que $\lim_{x\to+\infty}|f(x)| = +\infty$.
2. Montrer que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

Exercice 12 : (Auliac - Caby p.273) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante. Montrer que si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty$, alors $f(t) = o(\frac{1}{t})$ pour $t\to+\infty$. Etudier la réciproque.

Exercice 13 : (Auliac - Caby p.275)

1. Etablir $\int_0^t \mathrm{e}^{\theta^2}\,d\theta = \frac{\mathrm{e}^{t^2}-1}{2t} + o\left(\int_0^t \mathrm{e}^{\theta^2}\,d\theta\right),\ t\to+\infty$.
2. En déduire $\int_0^t \mathrm{e}^{\theta^2}\,d\theta \sim \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2t},\ t\to+\infty$.
3. Pour $x\to+\infty$, trouver un équivalent simple de $\int_1^x\left(\int_0^t \mathrm{e}^{\theta^2-t^2}\,d\theta\right)\,dt$.

Exercice 14 : (Auliac - Caby p.287)
Pour étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty}|\sin t|^{t\ln(1+t^2)}\,dt$, on pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|^{t\ln(1+t^2)}\,dt$$

1. Préciser $\lim_{t\to0}(\sin t)^{t\ln(1+t^2)}$. Conclusion ?
2. Prouver que $u_n > \int_0^\pi(\sin x)^{(n+1)\pi\ln(1+(n+1)^2\pi^2)}\,dx$
3. Justifier que pour $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, on a $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$. En déduire que $u_n > \frac{\pi}{1+(n+1)\pi\ln(1+(n+1)^2\pi^2)}$. Conclure.

Exercice 15 : (Monier Ed. 2000 p.216)
Soit $f : [1,+\infty[\to\mathbb{R}^+$ continue, décroissante telle que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1. Montrer $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.
2. Soit la fonction g définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = x(f(x)-f(x+1))$. Montrer que $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 16 : (Monier Ed. 2000 p.221)
Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_1^{+\infty} f^2(t)\, dt$ converge.
Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_1^x f(t)\, dt = 0$.

Exercice 17 : (Kaczor - Nowak p. 31, 34)

1. Prouver que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge si, et seulement si, pour toute suite croissante $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$ et telle que $a_0 = a$ et $a_n > a$ pour $n \geq 1$, la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\, dx \quad (1)$$

converge. De plus, en cas de convergence,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\, dx$$

2. Prouver que si f est positive, il suffit qu'il existe une suite croissante $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$ et pour laquelle la série (1) converge pour que l'intégrale impropre converge.
3. Soit f une fonction monotone sur $\mathbb{R}_+$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge. Prouver que

$$\lim_{h \to 0_+} h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$$

Utiliser ce résultat pour déterminer $\lim_{h \to 0_+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h}{1+h^2n^2}$

Exercice 18 : (Gourdon p.170)
On considère le logarithme intégral qui est l'application définie par

$$\forall x \geq 2,\ \mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner un développement asymptotique de $\mathrm{li}(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 19 : (Gourdon p.174)
On considère l'application $F : [0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$. Montrer l'existence de $\lim_{x \to 1^-} F(x)$ et calculer cette limite. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt$.

Bibliographie :

- G. Auliac et J.Y. Caby : Exercices corrigés d'Analyse pour le Capes et l'Agrégation interne
- G. Auliac et J.Y. Caby : Analyse pour le Capes et l'Agrégation interne
- J.M. Monier : Analyse MPSI Éditions 2000 et Analyse MP Éditions 2006
- J.F. Dantzer : Mathématiques pour l'agrégation interne : Analyse et Probabilités
- X. Gourdon : Les Mathématiques en tête Analyse - W.J. Kaczor et M.T. Nowak (Traduction E. Kouris) : Problèmes d'Analyse III - Intégration - Exercices corrigés - EDP Sciences.