SESSION 2014

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

EXERCICE I

I.1

I.1.a La matrice A est symétrique réelle et donc orthogonalement semblable à une matrice diagonales d'après le théorème spectral. En particulier est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

I.1.b En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & 3 & 0 \\ 3 & 1-X & 4 \\ 0 & 4 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2-2X-15) - 9(1-X) = (1-X)(X^2-2X-24) = -(X-1)(X+4)(X-6).$$

• Un système d'équations de $E_1(A)$ est $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ 3x+4z=0 \end{array}\right.$. Donc $E_1(A) = \text{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \dfrac{1}{5}(-4,0,3)$.

• Un système d'équations de $E_{-4}(A)$ est $\left\{\begin{array}{l} 5x+3y=0 \\ 4y+5z=0 \end{array}\right.$. Donc $E_{-4}(A) = \text{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}(3,-5,4)$.

• Mais alors $E_6(A) = \text{Vect}(e_3)$ où $e_3 = e_1 \wedge e_2 = \dfrac{1}{25\sqrt{2}}(15,25,20) = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}(3,5,4)$.

Donc, $A = PD\,{}^tP$ où $D = \text{diag}(1,-4,6)$ et $P = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -4\sqrt{2} & 3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 3\sqrt{2} & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

I.1.c Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
A^n = PD^n\,{}^tP &= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -4\sqrt{2} & 3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 3\sqrt{2} & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4\sqrt{2} & 0 & 3\sqrt{2} \\ 3 & -5 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -4\sqrt{2} & 3\times(-4)^n & 3\times 6^n \\ 0 & -5\times(-4)^n & 5\times 6^n \\ 3\sqrt{2} & 4\times(-4)^n & 4\times 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4\sqrt{2} & 0 & 3\sqrt{2} \\ 3 & -5 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 32+9\times(-4)^n+9\times 6^n & -15\times(-4)^n+15\times 6^n & -24+12\times(-4)^n+12\times 6^n \\ -15\times(-4)^n+15\times 6^n & 25\times(-4)^n+25\times 6^n & -20\times(-4)^n+20\times 6^n \\ -24+12\times(-4)^n+12\times 6^n & -20\times(-4)^n+20\times 6^n & 18+16\times(-4)^n+16\times 6^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

I.2 Pour tout entier naturel n, posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.. Pour tout entier naturel n, on a $X_{n+1} = AX_n$ puis

$$X_n = A^n X_0 = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 32 + 9 \times (-4)^n + 9 \times 6^n & -15 \times (-4)^n + 15 \times 6^n & -24 + 12 \times (-4)^n + 12 \times 6^n \\ -15 \times (-4)^n + 15 \times 6^n & 25 \times (-4)^n + 25 \times 6^n & -20 \times (-4)^n + 20 \times 6^n \\ -24 + 12 \times (-4)^n + 12 \times 6^n & -20 \times (-4)^n + 20 \times 6^n & 18 + 16 \times (-4)^n + 16 \times 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 8 + 21 \times (-4)^n + 21 \times 6^n \\ -35 \times (-4)^n + 35 \times 6^n \\ -6 + 28 \times (-4)^n + 28 \times 6^n \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{8 + 21 \times (-4)^n + 21 \times 6^n}{50},\ v_n = \frac{-35 \times (-4)^n + 35 \times 6^n}{50} \text{ et } w_n = \frac{-6 + 28 \times (-4)^n + 28 \times 6^n}{50}.}$$

EXERCICE II

II.1.

II.1.a Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Alors, $p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. Mais alors

$$x = p(y) = p^2(y) = p(x) = 0.$$

Ceci montre que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Im}\ p) + \dim(\mathrm{Ker}\ p) = \dim(E)$. On sait alors que

$$\boxed{E = \mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Ker}\ p.}$$

II.1.b Soit r le rang de p (donc $\mathrm{Im}(p)$ est de dimension r). Si $r = 0$, alors $p = 0$ puis $\mathrm{Tr}(p) = 0$. Dans ce cas, on a $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$.
Supposons maintenant $r > 0$. On sait que les vecteurs de $\mathrm{Im}(p)$ sont les vecteurs invariants par p (si $x = p(x)$, alors x est dans $\mathrm{Im}(p)$ et si x est dans $\mathrm{Im}(p)$, il existe y tel que $x = p(y)$ puis $p(x) = p(p(y)) = p(y) = x$). Dans une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Ker}\ p$, la matrice de p s'écrit $A = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$. Mais alors, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Tr}(A) = r = \mathrm{rg}(p)$.

II.1.c Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $A = \mathrm{diag}(-1, 3)$. On a $\mathrm{Tr}(u) = 2 = \mathrm{rg}(u)$ (car 0 n'est pas valeur propre de u. Mais $A^2 = \mathrm{diag}(1, 9) \neq A$ et donc u n'est pas un projecteur.

Ainsi, si $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u)$, u n'est pas nécessairement un projecteur.

II.2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1}$. A est diagonalisable car diagonale. De plus, $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}$. $\mathrm{rg}(B) = 1$. D'autre part, $B^2 = 0$ ou encore B est nilpotente. Mais alors $\mathrm{Sp}(B) = (0, 0, 0)$ (car les valeurs propres d'une matrice sont à choisir parmi les racines d'un polynôme annulateur). Si B est diagonalisable, alors B est semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle ce qui n'est pas. Donc B n'est pas diagonalisable.

II.3.

II.3.a Puisque $\mathrm{rg}(u) = 1$, $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension $n - 1$ d'après le théorème du rang. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$. $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une famille libre de E que l'on peut donc compléter en $\beta = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ base de E. Dans la base β, la matrice de u a la forme désirée.

II.3.b 1ère solution. On rappelle qu'un endomorphisme de E est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.

Puisque $n \geqslant 2 > 1 = \text{rg}(u)$, $u \notin GL(E)$. On sait alors que 0 est valeur propre de u et que l'ordre de multiplicité de 0 est supérieur ou égal à la dimension de $\text{Ker}(u)$ à savoir $n-1$. 0 est donc valeur propre de u au moins $n-1$ fois. La dernière valeur propre λ est fournie par la trace de u :

$$\text{Tr}(u) = 0 + \ldots + 0 + \lambda = \lambda,$$

et donc $\text{Sp}(u) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \text{Tr}(u))$. En particulier, puisque $\text{Tr}(u)$ est un réel, le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{R}$.

• Si $\text{Tr}(u) = 0$, u admet une valeur propre d'ordre n à savoir 0. Le sous-espace propre associé est de dimension $n-1 \neq n$. On sait dans ce cas que u n'est pas diagonalisable.
• Si $\text{Tr}(u) \neq 0$, u admet une valeur propre d'ordre $n-1$ à savoir 0 et une valeur propre simple $\text{Tr}(u)$. La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est l'ordre de multiplicité de 0 à savoir $n-1$ et d'autre part la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre simple $\text{Tr}(u)$ est automatiquement 1. Dans ce cas, u est diagonalisable.

En résumé, u est diagonalisable si et seulement $\text{Tr}(u) \neq 0$.

2ème solution. Avec les notations de la question précédente, $\text{Tr}(u) = a_n$ puis

$$A(A - \text{Tr}(u)I_n) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_n & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -a_n & a_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Le polynôme $P = X(X - \text{Tr}(u))$ est donc annulateur de u.

• Si $\text{Tr}(u) \neq 0$, P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et annulateur de u. Dans ce cas, u est diagonalisable.
• Si $\text{Tr}(u) = 0$, alors $A^2 = 0$. A est donc nilpotente et non nulle (car $\text{rg}(u) \neq 0$). Comme à la question II.2, u n'est pas diagonalisable.

II.3.c D'après la question II.3.a, il existe une base β dans laquelle la matrice de u s'écrit $A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (car $\text{Tr}(u) = 1$).

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} = A,$$

et donc u est projecteur.

II.3.d Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A (on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$).
$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A$ et donc u est un projecteur, de rang 1 (car $C_1 \neq 0$, $C_2 = C_1$ et $C_3 = -C_1$). L'image de A est donc engendrée par la première colonne de A ou encore $\text{Im}(u) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$. Le noyau de u est le plan d'équation $x + y - z = 0$ et donc $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_3)$.

Partie III : problème

Questions préliminaires

III.1.

III.1.a Théorème spectral. Soit s un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. s est diagonalisable dans une base orthonormée de E.
Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale (réelle).

III.1.b La matrice S est symétrique et $\chi_S = X^2$. Si S est diagonalisable, alors S est semblable à $\text{diag}(0,0) = 0$ et donc égale à 0 ce qui n'est pas. Donc S n'est pas diagonalisable.

III.2.

III.2.a Soit $x \in E$. Posons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$. Puisque β est orthonormée,

$$R_s(x) = \langle s(x)|x\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \varepsilon_i | \sum_{j=1}^{n} x_j \varepsilon_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

III.2.b Puisque β est orthonormée, $x \in S(0,1) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Pour $x \in S$, on a $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_n$ et $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_1$. Donc, pour tout x de $S(0,1)$, $R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n]$ ou encore $R_s([0,1]) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$.

III.3.

III.3.a Soient λ une valeur propre de s et x un vecteur propre associé.

$$\langle s(x)|x\rangle = \langle \lambda x|x\rangle = \lambda\langle x|x\rangle = \lambda\|x\|^2,$$

et donc, puis que $x \neq 0$,

$$\lambda = \frac{\langle s(x)|x\rangle}{\|x\|^2}.$$

Si s est symétrique positif (resp. symétrique défini positif), alors, $\langle s(x)|x\rangle \geqslant 0$ (resp. $\langle s(x)|x\rangle > 0$ car $x \neq 0$). Comme $\|x\|^2 > 0$, on en déduit que $\lambda \geqslant 0$ (resp. $\lambda > 0$).

On a montré que si s est symétrique positif (resp. symétrique défini positif), ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

III.3.b Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $s_{i,j}$ est la i-ème coordonnée de $s(e_j)$ dans la base B. Puisque B est orthonormée, $s_{i,j} = \langle s(e_i)|e_j\rangle$. En particulier, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $s_{i,i} = \langle s(e_i), e_i\rangle = R_s(e_i)$. Puisque $e_i \in S(0,1)$, $s_{i,i} \in [\lambda_1, \lambda_n]$ d'après la question III.2.b.

Un maximum sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$

III.4. Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMM - I_n \end{array}$, $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 \\ M & \mapsto & ({}^tM, M) \end{array}$, $h : \begin{array}{ccc} (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ (M,N) & \mapsto & MN \end{array}$
et $k : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M - I_n \end{array}$.

g est linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. Donc g est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
h est bilinéaire de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ est de dimension finie. Donc h est continue sur $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.
k est affine de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. Donc k est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Mais alors $f = k \circ h \circ g$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

III.5. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$|a_{i,j}| = \sqrt{a_{i,j}^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}^2} = \|C_j\| = 1.$$

On en déduit que $\forall A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty \leqslant 1$.

III.6. Le singleton $\{0\}$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (boule fermée de centre 0 et de rayon 0. Comme $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0\})$, $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.
D'autre part, $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'après la question précédente. Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie et que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème de Borel-Lebesgue.

III.7.

III.7.a La matrice S est symétrique réelle. Donc, il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}$ telle que $S = P\Delta P^{-1}$. Mais alors

$$T(A) = \mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}\left(AP\Delta P^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\Delta\right) = \mathrm{Tr}(B\Delta),$$

où $B = P^{-1}AP$. Puisque A et P sont des matrices orthogonales, B est une matrice orthogonale car ($\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe.

On a montré que pour toute matrice orthogonale A, il existe une matrice orthogonale B (dépendant de A telle que $T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$.

III.7.b L'application $f\ :\ A \mapsto AS$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire sur l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie et l'application $g\ :\ A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire sur l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donc, $T = g \circ f$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, l'application T est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. D'après la question III.6, $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque T est continue sur le compact $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, T admet un maximum t sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

III.7.c Avec les notations de la question III.7.a,

$$\begin{aligned}
T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta) &= \sum_{i=1}^{n} b_{i,i}\lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} |b_{i,i}\lambda_i| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,|b_{i,i}| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ (d'après la question III.5 et puisque les } \lambda_i \text{ sont positifs)} \\
&= \mathrm{Tr}(S).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour toute matrice orthogonale A, $T(A) \leqslant \mathrm{Tr}(S) = T(I_n)$. Puisque I_n est une matrice orthogonale, on a montré que

$$\boxed{t = T(I_n) = \mathrm{Tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.}$$

Inégalité d'Hadamard

III.8. D'après l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique rappelée par l'énoncé et puisque les λ_i sont positifs, on a

$$\sqrt[n]{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \leqslant \frac{1}{n}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n).$$

Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$, on en déduit que

$$\det(S) = \lambda_1 \ldots \lambda_n \leqslant \left(\frac{1}{n}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\right)^n = \left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S)\right)^n.$$

III.9. ${}^tS_\alpha = {}^t\left({}^tDSD\right) = {}^tD\,{}^tS\,{}^t\left({}^tD\right) = {}^tDSD = S_\alpha$ et donc $S_\alpha \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En posant $Y = DX$,

$${}^tXS_\alpha X = {}^tX\,{}^tDSDX = {}^t(DX)S(DX) = {}^tYSY \geqslant 0.$$

Donc $S_\alpha \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Enfin,

$$\mathrm{Tr}\left(S_\alpha\right) = \mathrm{Tr}({}^tDSD) = \mathrm{Tr}(SD\,{}^tD) = \mathrm{Tr}(SD^2) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_{i,i}.$$

III.10. Puisque S_α est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, l'inégalité $(*)$ fournit $\det(S_\alpha) \leqslant \left(\dfrac{1}{n}\mathrm{Tr}(S_\alpha)\right)^n$. Or,

$$\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}\right)^2 s_{i,i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = 1,$$

et d'autre part,

$$\det(S_\alpha) = \det({}^t DSD) = \det(S)\,(\det(D))^2 = \frac{\det(S)}{\prod_{i=1}^{n} s_{i,i}}.$$

Par suite, $\dfrac{\det(S)}{\prod_{i=1}^{n} s_{i,i}} \leqslant 1$ et donc $\det(S) \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$ (car $\prod_{i=1}^{n} s_{i,i} > 0$)).

III.11. Les coefficients diagonaux de S_ε sont les $s_{i,i}+\varepsilon$. Puisque les $s_{i,i}$ sont positifs d'après la question III.3.b, les $s_{i,i}+\varepsilon$ sont strictement positifs. La question précédente permet d'affirmer que $\det(S_\varepsilon) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(s_{i,i}+\varepsilon)$ $(**)$.

L'inégalité précédente est vraie pour tout $\varepsilon > 0$. Quand ε tend vers 0, S_ε tend vers S. Mais alors, $\det(S_\varepsilon)$ tend vers $\det(S)$ par continuité du déterminant sur $\mathscr{M}_(\mathbb{R})$. En faisant tendre ε vers 0 dans $(**)$, on obtient $\det(S) \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$.

Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

III.12. Comme à la question II.7.a, $T(A) = \mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(A\Omega\Delta{}^t\Omega) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$ où $B = {}^t\Omega A\Omega$.
La matrice B est orthogonalement semblable à la matrice A qui est orthogonalement à une matrice diagonale à coefficients strictement positifs. Donc, la matrice B est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients strictement positifs. On en déduit que $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
D'autre part, puisque A et B sont semblables, A et B ont même déterminant à savoir 1. On a montré que $B \in \mathscr{U}$.

III.13. On a montré à la question précédente que $\{\mathrm{Tr}(AS),\ A \in \mathscr{U}\} \subset \{\mathrm{Tr}(B\Delta),\ B \in \mathscr{U}\}$. Inversement, soit $B \in \mathscr{U}$. Comme à la question précédente, la matrice $A = \Omega B{}^t\Omega$ est dans $\mathscr{U}$ et vérifie $\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$. Donc, $\{\mathrm{Tr}(B\Delta),\ B \in \mathscr{U}\} \subset \{\mathrm{Tr}(AS),\ A \in \mathscr{U}\}$ et finalement $\{\mathrm{Tr}(AS),\ A \in \mathscr{U}\} = \{\mathrm{Tr}(B\Delta),\ B \in \mathscr{U}\}$.

$\mathrm{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,i}\lambda_i$. Les λ_i sont strictement positifs et les $b_{i,i}$ sont strictement positifs d'après la question III.3.b et puisque $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Donc $\mathrm{Tr}(B\Delta) > 0$.

Ainsi, $\{\mathrm{Tr}(B\Delta),\ B \in \mathscr{U}\}$ est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$. On sait que $\{\mathrm{Tr}(B\Delta),\ B \in \mathscr{U}\}$ admet une borne inférieure que l'on note m.

III.14. Puisque les $\lambda_i b_{i,i}$ sont positifs,

$$\mathrm{Tr}(B\Delta) = n \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_{i,i} \geqslant n\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i b_{i,i}\right)^{1/n} = n\,(\lambda_1\ldots\lambda_n)^{1/n}\,(b_{1,1}\ldots b_{n,n})^{1/n}.$$

III.15. Notons $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ les valeurs propres de B. Puisque B est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, l'inégalité de Hadamard fournit

$$b_{1,1}\ldots b_{n,n} \geqslant \lambda'_1\ldots\lambda'_n = \det(B) = 1.$$

Comme d'autre part, $\lambda_1\ldots\lambda_n = \det(S) > 0$, on a

$$\mathrm{Tr}(B\Delta) \geqslant n\,(\lambda_1\ldots\lambda_n)^{1/n}\,(b_{1,1}\ldots b_{n,n})^{1/n} \geqslant n\,(\det(S))^{1/n}.$$

III.16. La question précédente montre que $n\,(\det(S))^{1/n}$ est un minorant de $\{\mathrm{Tr}(B\Delta),\ B \in \mathscr{U}\}$. Puisque m est le plus grand de ces minorants, on a donc $m \geqslant n\,(\det(S))^{1/n}$.

La matrice D est dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et son déterminant est égal à $\dfrac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}\left((\det(S))^{1/n}\right)^n = 1$. Donc $D \in \mathscr{U}$. Par suite

$$m \leqslant \mathrm{Tr}(D\Delta) = \mathrm{Tr}(\mathrm{diag}\left((\det(S))^{1/n}, \dots, (\det(S))^{1/n}\right) = \mathrm{Tr}\left((\det(S))^{1/n}\, I_n\right) = n\,(\det(S))^{1/n},$$

et finalement

$$\boxed{m = n\,(\det(S))^{1/n}.}$$

