

AGRÉGATION INTERNE
DE MATHÉMATIQUES
Session 2010, épreuve 2

– NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES –

La lettre \mathbf{C} désigne le corps des nombres complexes ; les espaces vectoriels considérés seront toujours des espaces vectoriels sur ce corps \mathbf{C} , et les symboles $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ ont leur signification habituelle. On note \mathbf{N}^* (resp. \mathbf{C}^*) l'ensemble des entiers ≥ 1 (resp. l'ensemble des complexes non-nuls).

La lettre \mathcal{P} désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes (« polynômes » et « fonctions polynômes » seront toujours confondus, puisqu'on travaille sur le corps \mathbf{C} , infini). La partie réelle (resp. la partie imaginaire) du nombre complexe z sera notée $\operatorname{Re}(z)$ (resp. $\operatorname{Im}(z)$) en un endroit du problème.

On rappelle que le symbole de Kronecker δ_{ij} vaut 1 et $i = j$ et 0 sinon (i et j étant deux entiers).

Enfin, pour une partie A d'un espace vectoriel normé \mathcal{E} on note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A .

L'objectif du problème est l'étude de l'équation de Guichard :

$$(G) \quad f(z+1) - f(z) = g(z)$$

dans un certain espace \mathcal{E} de fonctions définies sur \mathbf{C} , qui contient \mathcal{P} . Dans cette équation, $g \in \mathcal{E}$ est la donnée, $f \in \mathcal{E}$ l'inconnue.

La partie I étudie l'équation (G) sur \mathcal{P} , et donne une application.

La partie II définit l'espace \mathcal{E} et établit quelques-unes de ses propriétés qui seront utiles par la suite. La partie III étudie l'équation (G) sur \mathcal{E} .

La partie IV, enfin, étudie une variante multiplicative de (G), à savoir l'équation (sur \mathcal{E}) :

$$(H) \quad f(qz) - f(z) = g(z)$$

dans laquelle q est un nombre complexe non nul ($q \in \mathbf{C}^*$). Cette partie fait intervenir des considérations « diophantiennes », en ce sens que la vitesse d'approximation d'un irrationnel par des rationnels doit être prise en compte.

– Partie I : L'équation (G) sur \mathcal{P} et les opérateurs nilpotents –

Soit $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ l'opérateur de différence première défini par :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad (\Delta P)(z) = P(z+1) - P(z), \quad \text{où } \Delta P = \Delta(P) \tag{1}$$

1. (a) Démontrer que $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est une application linéaire *localement nilpotente*, c'est-à-dire (en notant $\Delta^n = \Delta \circ \dots \circ \Delta$ (n fois) et $\Delta^0 = \operatorname{id}$) :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \exists n \in \mathbf{N} \text{ tel que } \Delta^n P = 0.$$

- (b) Existe-t-il un entier $p \in \mathbf{N}$ tel que $\Delta^p = 0$?

2. Démontrer que $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ n'est pas injective et décrire son noyau.

3. On définit la suite $(H_n)_{n \geq 0}$ des *polynômes de Hilbert* sur \mathbf{C} par :

$$H_0(z) = 1; \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad H_n(z) = \frac{z(z-1)(z-n+1)}{n!}.$$

- (a) Démontrer que $\Delta H_0 = 0$, $\Delta H_n = H_{n-1}$ si $n \geq 1$, et $(\Delta^k H_n)(0) = \delta_{n,k}$.
- (b) Démontrer que $(H_n)_{n \geq 0}$ est une base de \mathcal{P} et que, plus précisément :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad P = \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^n P)(0) H_n \tag{2}$$

Expliciter les coefficients du polynôme $z \rightarrow z^3$ sur la base (H_n) .

- (c) Démontrer que $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est surjective. Comment conciliez-vous cela avec la question 2)?
4. (a) Soit p un entier fixé; on écrit $z^p = f(z+1) - f(z)$, avec $f \in \mathcal{P}$ et $f(0) = 0$. Démontrer que

$$\forall N \in \mathbf{N}, \quad \sum_{n=0}^N n^p = f(N+1) \quad (3)$$

- (b) Donner une formule simple pour calculer $\sum_{n=0}^N n^3$ en fonction de N .
5. (a) Pour $P \in \mathcal{P}$, on pose $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$. Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur \mathcal{P} .
- (b) L'application linéaire $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est-elle continue pour la norme précédente?
- (c) Montrer qu'il existe une norme sur \mathcal{P} pour laquelle Δ est continue.

Indication : on pourra utiliser le caractère localement nilpotent de Δ pour définir à partir de la formule (2) une norme faisant de Δ une application linéaire de norme 1.

6. On rappelle le *lemme de Baire pour les espaces vectoriels normés complets* ou « espaces de Banach » (admis ici) : Si $(F_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fermés d'un espace de Banach dont la réunion est tout l'espace, alors l'un au moins de ces fermés, F_p , est d'intérieur non-vide ($\overset{\circ}{F}_p \neq \emptyset$). On se donne X un tel espace de Banach (ici sur \mathbf{C}).

- (a) Soit Y un sous-espace vectoriel de X ; montrer que $\overset{\circ}{Y} \neq \emptyset \implies Y = X$.
- (b) Soit $T : X \rightarrow X$ une application linéaire continue *localement nilpotente* :

$$\forall x \in X, \exists n \in \mathbf{N} : T^n(x) = 0.$$

Démontrer que T est nilpotente : il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $T^n = 0$.

7. (a) L'espace vectoriel \mathcal{P} est-il complet pour la norme construite au 5)c) ?
- (b) L'espace vectoriel \mathcal{P} est-il complet pour au moins une norme ?

- Partie II : L'espace \mathcal{E} des fonctions entières -

Soit \mathcal{E} l'espace vectoriel des fonctions entières, c'est-à-dire des fonctions $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ qui s'écrivent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

où la série entière figurant au second membre a un rayon de convergence infini. On a immédiatement $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$.

1. (a) Démontrer que les a_n sont déterminés de façon unique par f et que l'on a plus précisément :

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt. \quad (4)$$

- (b) On pose $M(f, r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Démontrer que :

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbf{N}, \quad |a_n| \leq \frac{M(f, r)}{r^n}. \quad (5)$$

- (c) Démontrer que \mathcal{P} n'est pas égal à \mathcal{E} (il suffira de donner un exemple d'une fonction $f \in \mathcal{E}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, qui n'est pas un polynôme; on justifiera la réponse).
- (d) Démontrer que les seules fonctions de \mathcal{E} qui sont bornées sont les constantes.
- (e) Démontrer que

$$f \in \mathcal{P} \iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge uniformément sur } \mathbf{C} \text{ tout entier.}$$

2. Cette question a pour but de mettre en place quelques propriétés importantes de l'espace \mathcal{E} .

- (a) Soit (f_k) une suite de fonctions de \mathcal{E} , $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} z^n$. On suppose que (f_k) converge uniformément vers f sur tout compact de \mathbf{C} . Démontrer que f appartient à \mathcal{E} .

Indication : on pourra commencer par démontrer que :

$$\forall R > 0, \exists M > 0 \quad / \quad \forall (n, k) \in \mathbf{N}^2, |a_n^{(k)}| \leq \frac{M}{R^n}.$$

- (b) Démontrer qu'une fonction f de \mathbf{C} dans \mathbf{C} appartient à \mathcal{E} si et seulement s'il existe une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers f sur tout compact de \mathbf{C} .
- (c) Démontrer que \mathcal{E} est stable par produit, c'est-à-dire que $f, g \in \mathcal{E} \implies fg \in \mathcal{E}$.
- (d) Soit $f \in \mathcal{E}$, $a \in \mathbf{C}$ et $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $g(z) = f(z + a)$. Montrer que $g \in \mathcal{E}$. Ainsi, \mathcal{E} est stable par translation.

3. Une suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ de complexes est dite un *multiplicateur* de \mathcal{E} si, pour toute fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{E},$$

la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n z^n$ définit un élément de \mathcal{E} , c'est-à-dire a un rayon de convergence infini.

On se propose de montrer qu'on a équivalence entre :

- i) (λ_n) est un multiplicateur de \mathcal{E} ;
- ii) il existe des constantes $A, B > 0$ telles que : $\forall n \in \mathbf{N}, |\lambda_n| \leq AB^n$.

- (a) Démontrer que ii) implique i).
- (b) On suppose que ii) n'est pas réalisée. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(n_j)_{j \geq 1}$ d'entiers ≥ 1 avec : $\forall j \geq 1, |\lambda_{n_j}| > j^{n_j}$. Puis montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{E}$, de la forme $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{n_j} z^{n_j}$, telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{n_j} \lambda_{n_j} z^{n_j}$ ne soit pas infini. En déduire que ii) implique i).

- 4. (a) Démontrer que Δ , défini par $(\Delta f)(z) = f(z + 1) - f(z)$, envoie \mathcal{E} dans \mathcal{E} .
- (b) Décrire le noyau $\ker \Delta$ de $\Delta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, et montrer que ce noyau est de dimension infinie. Ainsi, $\Delta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est très loin d'être injective. On verra dans la partie III qu'elle est cependant surjective.

5. On rappelle que pour $\rho > 0$ et f définie et continue sur le cercle de centre 0 et de rayon ρ ($|w| = \rho$), à valeurs complexes, l'intégrale curviligne

$$I = \int_{|w|=\rho} f(w) dw$$

est par définition :

$$I = \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) i \rho e^{it} dt. \tag{6}$$

- (a) Démontrer que $|I| \leq 2\pi\rho M(f, \rho)$.
- (b) Montrer que si f appartient à \mathcal{E} alors $I = 0$.
- (c) Soit un élément h de \mathcal{E} et un entier $k \in \mathbf{Z}$. On pose :

$$J_k(h, \rho) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\rho} w^k h(w) dw .$$

Démontrer que $J_{-1}(h, \rho) = h(0)$ et $J_k(h, \rho) = 0$ pour tout $k \geq 0$.

6. (a) Montrer qu'il existe une fonction g de \mathcal{E} telle que

$$w \in \mathbf{C} \implies e^w = 1 + w + w^2 g(w) \quad \text{avec de plus} \quad |g(w)| \leq e - 2 \quad \text{si} \quad |w| = 1 .$$

- (b) Soit $k \in \mathbf{Z}$, et

$$I_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=1} \frac{w^k}{e^w - 1} dw .$$

- i) Démontrer que I_k est bien définie.
- ii) Démontrer que $I_0 = 1$ et que $I_k = 0$ si $k \geq 1$.

Indication : on pourra par exemple faire intervenir une série géométrique.

- Partie III : L'équation de Guichard dans \mathcal{E} -

A) Les polynômes de Bernoulli et une application :

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $z \in \mathbf{C}$, on pose :

$$B_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=1} \frac{e^{zw}}{(e^w - 1)} \frac{dw}{w^n} . \tag{7}$$

1. Démontrer que

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_{k-n}}{k!} z^k$$

puis que B_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n . Calculer B_0 .

2. (a) Démontrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*, B'_n(x) = nB_{n-1}(x) . \tag{8}$$

- (b) Démontrer que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \forall n \in \mathbf{N}^*, B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1} , \tag{9}$$

et que $B_n(1) = B_n(0)$ pour tout entier $n \geq 2$.

3. (a) Démontrer que

$$\forall n \geq 1, \int_0^1 B_n(x) dx = 0 . \tag{10}$$

- (b) Calculer B_1, B_2, B_3 .

Les deux questions suivantes proposent une application (à l'ordre 2) des polynômes B_n .

4. Soit $h : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$, de classe \mathcal{C}^2 .

- (a) Démontrer que

$$\int_0^1 h(t) dt = \frac{h(0) + h(1)}{2} - \int_0^1 h'(t) B_1(t) dt .$$

(b) Montrer ensuite que

$$\int_0^1 h(t) dt = \frac{h(0) + h(1)}{2} + \frac{h'(0) - h'(1)}{12} + \frac{1}{2} \int_0^1 h''(t) B_2(t) dt .$$

5. Soit $\varphi : [1, \infty[\rightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe C^1 , et N un entier non nul. On pose :

$$S_N = \sum_{n=1}^N \varphi(n) \quad \text{et} \quad I_N = \int_1^N \varphi(t) dt .$$

On désigne par π_2 la fonction 1-périodique valant $\frac{B_2}{2}$ sur $[0, 1[$.

(a) Montrer qu'on a, pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\int_n^{n+1} \varphi(t) dt = \frac{\varphi(n) + \varphi(n+1)}{2} + \frac{\varphi'(n) - \varphi'(n+1)}{12} + \int_n^{n+1} \varphi''(t) \pi_2(t) dt .$$

(b) Démontrer que

$$S_N = I_N + \frac{1}{2} (\varphi(1) + \varphi(N)) + \frac{1}{12} (\varphi'(N) - \varphi'(1)) - \int_1^N \varphi''(t) \pi_2(t) dt .$$

(c) On suppose que $|\varphi''|$ est intégrable sur $[1, \infty[$ et que $\varphi(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \varphi(n)$ et l'intégrale généralisée (impropre) $\int_1^\infty \varphi(t) dt$ sont de même nature.

(d) Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$?

B) Solution de l'équation (G) de Guichard

1. (Question préliminaire) : Soit $g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n$, $g \in \mathcal{E}$. On veut résoudre l'équation $\Delta f = g$, avec $f \in \mathcal{E}$. Pourquoi est-il plausible de prendre

$$f = \sum_{n=0}^\infty b_n \frac{B_{n+1}}{n+1} ?$$

Qu'est-ce qui pourrait empêcher ce choix ?

La suite de cette partie est consacrée à une modification des polynômes de Bernoulli destinée à contourner cet obstacle.

2. On se propose d'abord de montrer par l'absurde le fait suivant :

$$\text{Il existe } c > 0 \text{ tel que : } \forall n \in \mathbf{N}, |w| = (2n+1)\pi \implies |e^w - 1| \geq c . \quad (11)$$

On suppose donc qu'une telle constante c n'existe pas.

i) Montrer qu'on peut trouver des suites $(n_j)_{j \geq 1}$ d'entiers positifs et $(w_j)_{j \geq 1}$ de complexes telles que $|w_j| = (2n_j + 1)\pi$ et $\lim_{j \rightarrow \infty} e^{w_j} = 1$.

ii) Démontrer que l'on a : $\lim_{j \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(w_j) = 0$ et $\lim_{j \rightarrow \infty} (|\operatorname{Im}(w_j)| - (2n_j + 1)\pi) = 0$.

iii) Montrer qu'il existe une suite (ε_j) , à valeurs dans $\{+1, -1\}$ et telle que la quantité $\delta_j = w_j - i\varepsilon_j(2n_j + 1)\pi$ tende vers 0 quand j tend vers $+\infty$.

iv) Conclure que (11) est vrai.

Dans ce qui suit, on pose, pour $n \in \mathbf{N}$ et $z \in \mathbf{C}$:

$$\rho_n = (2n+1)\pi; \quad A_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=\rho_n} \frac{e^{zw}}{(e^w - 1) w^n} dw . \quad (12)$$

3. Démontrer que A_n est dans \mathcal{E} , et que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall z \in \mathbf{C}, \quad (\Delta A_n)(z) = nz^{n-1}.$$

4. Montrer qu'il existe des constantes a et b strictement positives telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall z \in \mathbf{C}, |A_n(z)| \leq ae^{nb|z|}. \quad (13)$$

5. Soit $g \in \mathcal{E}$. Démontrer que l'équation de Guichard (G) : $f(z+1) - f(z) = g(z)$ possède au moins une solution dans \mathcal{E} . Décrire toutes les solutions de (G) .

– Partie IV : La version multiplicative (H) de l'équation de Guichard –

Soit $q \in \mathbf{C}^*$. On considère dans cette partie l'équation « aux q -différences »

$$(H) \quad f(qz) - f(z) = g(z), \quad \text{avec } g \in \mathcal{E}.$$

1. On suppose $|q| \neq 1$. Démontrer que (H) possède une solution $f \in \mathcal{E}$ si et seulement si $g(0) = 0$. Décrire alors l'ensemble de toutes les solutions.

Dans la suite, on suppose $|q| = 1$ et plus précisément $q = e^{2i\pi\theta}$, où $\theta \notin \mathbf{Q}$.

2. (**Question préliminaire**) : Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $\|x\|$ la distance de x à l'entier le plus proche :

$$\|x\| = d(x, \mathbf{Z}) = \inf_{m \in \mathbf{Z}} |x - m| = \min_{m \in \mathbf{Z}} |x - m|.$$

Démontrer que $\|x\| \leq \frac{1}{2}$, et qu'on a la double inégalité :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad 4\|x\| \leq |e^{2i\pi x} - 1| \leq 2\pi\|x\|.$$

Indication : on rappelle que $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \implies \sin u \geq \frac{2}{\pi}u$.

3. On dit que θ est *lentement approchable* (par des rationnels) s'il existe $a > 0$ et $b > 1$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \|n\theta\| \geq ab^{-n}. \quad (14)$$

On dit que θ est *vite approchable* si $\theta \notin \mathbf{Q}$ et si θ n'est pas lentement approchable. On note A l'ensemble des irrationnels lentement approchables, et B l'ensemble des irrationnels vite approchables.

(a) Démontrer que $\sqrt{2} \in A$.

(b) Montrer qu'il existe une suite croissante d'entiers positifs $(p_k)_{k \geq 1}$ telle que l'on ait :

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_k}} \in B.$$

Indication : on pourra définir les p_k de proche en proche afin d'avoir une croissance suffisamment rapide.

4. Soit θ un irrationnel, et $q = e^{2i\pi\theta}$.

(a) Montrer la double inégalité :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 4\|n\theta\| \leq |q^n - 1| \leq 2\pi\|n\theta\|.$$

(b) Montrer qu'on a équivalence entre :

i) θ est *lentement approchable*, autrement dit $\theta \in A$;

ii) pour toute $g \in \mathcal{E}$ avec $g(0) = 0$, l'équation (H) possède une solution $f \in \mathcal{E}$.

Indication : on pourra utiliser la question 3) de la partie II sur les multiplicateurs de \mathcal{E} .