

**Agrégation interne
et CAERPA de Mathématiques**

Deuxième épreuve écrite

Session 2005

Notations et objectifs du problème.

On désigne par \mathcal{E} l'espace vectoriel des suites $(x_k)_{k \geq 0}$ de nombres complexes, par \mathbf{E} le sous-espace vectoriel de \mathcal{E} formé des suites bornées et par \mathbf{E}_c le sous-espace vectoriel de \mathbf{E} constitué des suites convergentes (il n'est pas demandé d'établir ces inclusions).

Si $x = (x_k)_{k \geq 0}$ est un élément de \mathbf{E} on pose $\|x\| = \sup \{|x_k|, k \geq 0\}$; on admet que $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbf{E} et que \mathbf{E} est complet pour cette norme.

On note \mathcal{T} l'application de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui à $x = (x_k)_{k \geq 0}$ associe $y = (y_k)_{k \geq 0}$ définie par $y_k = \frac{\sum_{j=0}^k x_j}{k+1}$. Cette application est linéaire (il n'est pas demandé de le démontrer).

Questions préliminaires

1. Montrer que \mathbf{E} est stable par \mathcal{T} . On note T la restriction de \mathcal{T} à \mathbf{E} .
2. Vérifier que T est une application linéaire continue.
3. Montrer que \mathbf{E}_c est stable par T et plus précisément que si x converge vers l , il en est de même pour $y = Tx$.

Objectifs

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de T . Il est constitué de trois parties indépendantes.

La partie I permet d'examiner quelques exemples montrant une variété importante de comportements possibles.

Dans la partie II on détermine le noyau, l'image et le spectre de T .

La partie III est consacrée à l'aspect régularisant de T . On y établit que :

1. Si x est une suite bornée, $(T^n x)_{n \geq 0}$ converge simplement vers une suite constante.
2. L'ensemble des suites x de \mathbf{E} telles que, pour tout n , $T^n x$ soit une suite divergente, est dense dans \mathbf{E} .
3. Si Ω est l'ensemble des suites à termes dans $[0, 1]$, on définit la probabilité de KOLMOGOROFF P sur Ω et on démontre que :
 - (a) $P(x \in \Omega \text{ et } x \text{ converge}) = 0$.
 - (b) $P(x \in \Omega \text{ et } T(x) \text{ converge}) = 1$.

Partie I : Exemples

A. Premiers exemples

1. Soit θ dans $]0, 2\pi[$; dans cette question on note x la suite $(x_k)_{k \geq 0}$ définie par $x_k = \exp(ik\theta)$. On pose $y = Tx$. Démontrer que y appartient à \mathbf{E}_c .

2. Soit n un entier ≥ 1 ; dans cette question on note x la suite définie par $x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est multiple de } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On pose $y = Tx$.

(a) Calculer y_{pn+j} pour $p \geq 0$ et $0 \leq j < n$;

(b) En déduire que y appartient à \mathbf{E}_c .

3. Quel est le lien entre les exemples précédents et la troisième question préliminaire ?

4. Soit t dans $[0, 1]$. On définit $x(t)$ par :

$$\begin{cases} x_0(t) = t \\ x_{k+1}(t) = (x_k(t) - 1)^2 \text{ pour } k \geq 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que, pour tout t dans $[0, 1]$, la suite $x(t)$ est à valeurs dans $[0, 1]$.

On pose alors $y(t) = Tx(t)$.

Soit t_0 le nombre $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. (Il vaut 0,38 à 10^{-2} près).

(a) On se propose de démontrer que, lorsque $t \neq t_0$, la suite $x(t)$ est divergente.

i. On suppose la suite $x(t)$ convergente. Trouver la limite ℓ de $x(t)$.

ii. Vérifier que, si $t \neq t_0$, alors, pour tout entier k , $x_k(t) \neq \ell$.

Si, dans ces conditions, la suite $x(t)$ était convergente, quelle serait la limite (quand k tend vers l'infini) du rapport $\frac{x_{k+1}(t) - \ell}{x_k(t) - \ell}$?

iii. Conclure.

(b) On définit f et g fonctions de $[0, 1]$ dans lui-même par :

$$f(x) = (x - 1)^2 \text{ et } g = f \circ f.$$

i. Dessiner le graphe de la fonction g en précisant les variations, la position du graphe par rapport à la première bissectrice et ses points d'intersection avec cette droite.

ii. Pour cette question, on peut se contenter d'une argumentation basée sur le graphe.

Montrer que les suites extraites $(x_{2k}(t))_{k \geq 0}$ et $(x_{2k+1}(t))_{k \geq 0}$ sont convergentes.

En déduire que $y(t)$ est convergente et identifier sa limite en fonction de t .

iii. On rappelle que $y(t) = (y_k(t))_{k \geq 0}$. La suite de fonctions (y_k) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

B. Une remarque

Soit x dans \mathbf{E} et $y = Tx$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 1$, $|y_k - y_{k-1}| \leq \frac{2\|x\|}{k+1}$.

2. En déduire que si x est une suite à valeurs réelles alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de y est un intervalle.

C. Suites à valeurs dans $\{0, 1\}$

Pour tout entier $p \geq 1$, on pose $u_p = 1! + 2! + 3! + \dots + p!$ et $v_p = 1! + 3! + 5! + \dots + (2p-1)!$

De plus $u_0 = 0$ et $v_0 = 0$.

1. Montrer que $u_p \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} p!$ (on pourra mettre $p!$ en facteur). Montrer de même que $v_p \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} (2p-1)!$

On définit une suite x de la manière suivante :

si $k \in \mathbf{N}$, il existe un unique $j(k) \geq 0$ tel que $u_{j(k)} \leq k < u_{j(k)+1}$ et dans ce cas, si $j(k)$ est pair on pose $x_k = 1$, si $j(k)$ est impair on pose $x_k = 0$.

Autrement dit

$$x = 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, (24 \text{ fois}), 1, 1, 1, (120 \text{ fois}) \dots$$

2. On pose $y = Tx$. Calculer y_k lorsque $k = u_p$.

3. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de y est égal à $[0, 1]$.
 Quel est celui de la suite x ?
4. Soient (Ω, \mathcal{B}, P) un espace probabilisé, $(X_k)_{k \geq 0}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes et de paramètre $1/2$. ($\forall k \geq 0, P(X_k = 0) = P(X_k = 1) = 1/2$).
- (a) Calculer, pour $k \geq 0$ et $p \geq 0, P(X_k = X_{k+1} = X_{k+2} = \dots = X_{k+p} = 0)$, puis $P(\forall j \geq k, X_j = 0)$.
- (b) En déduire que la suite $(X_k)_{k \geq 0}$ diverge presque sûrement.
- (c) On appelle Y la suite TX où X est la suite (X_k) .
 Montrer, en utilisant un théorème de cours, que la suite $(Y_k)_{k \geq 0}$ converge presque sûrement.

Partie II. Étude de l'endomorphisme T

A. Généralités

1. Montrer que l'application linéaire \mathcal{T} est une bijection de \mathcal{E} sur lui-même.
2. On désigne par \mathcal{A} l'ensemble $\left\{ \frac{1}{k+1}, k \in \mathbf{N} \right\}$. Soit λ un nombre complexe. On note $I_{\mathcal{E}}$ l'application identique de \mathcal{E} dans lui-même.
- (a) Montrer que si λ n'appartient pas à l'ensemble \mathcal{A} , alors l'application linéaire $\mathcal{T} - \lambda I_{\mathcal{E}}$ est bijective.
- (b) Montrer que si λ appartient à l'ensemble \mathcal{A} , alors l'application linéaire $\mathcal{T} - \lambda I_{\mathcal{E}}$ n'est ni injective ni surjective.
3. Soit $y = (y_k)_{k \geq 0}$ dans \mathbf{E} . Montrer que :

$$y \in \text{Im}(T) \iff \exists K > 0 \text{ tel que, } \forall k \geq 1, |(k+1)y_k - ky_{k-1}| \leq K.$$

4. L'application linéaire T de \mathbf{E} dans \mathbf{E} est-elle surjective ? Est-elle injective ?

B. Quelques suites auxiliaires

Dans ce **B.**, on considère un nombre complexe λ vérifiant les hypothèses suivantes :

$$(L) \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda \notin \mathcal{A}, \quad \text{Re} \frac{1}{\lambda} \neq 1.$$

On écrit $1 - \frac{1}{\lambda} = a + ib$ avec a et b réels ($a \neq 0$). On définit la suite α par :

$$(*) \quad \alpha_0 = \frac{1}{1-\lambda} \text{ et, pour } k \geq 1, \alpha_k = \frac{1}{(1 + (1 - \frac{1}{\lambda})\frac{1}{k})} \alpha_{k-1}.$$

Cette suite est bien définie grâce aux hypothèses (L).

1. Vérifier que $\alpha_k \neq 0$ pour tout entier positif k .
2. Montrer que $\ln |\alpha_k| - \ln |\alpha_{k-1}| = -\frac{a}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$.
3. Que dire de la suite $|\alpha|$ si a est négatif ?

4. On rappelle qu'il existe un nombre réel γ tel que l'on ait : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Pour a positif, montrer qu'il existe un nombre réel A_1 strictement positif tel que : $|\alpha_k| \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A_1}{k^a}$.
(A_1 et les nombres réels A_2, \dots, A_5 qui suivent dépendent de λ mais sont indépendants de k).

5. On définit $U_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j|\alpha_{j-1}|}$ et $V_k = \sum_{j=1}^{k-1} \left| \frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}} \right|$.

(a) Montrer qu'il existe une constante A_2 strictement positive telle que :

$$\forall k \geq 1, \quad 0 \leq U_k \leq A_2 k^a.$$

(b) En déduire qu'il existe une constante A_3 telle que $\forall k \geq 1 \quad |\alpha_k U_k| \leq A_3$.

6. En exprimant $\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}}$ grâce à (*) montrer qu'il existe une constante A_4 strictement positive telle que :

$$\forall k \geq 1, \quad |\alpha_k| V_k \leq A_4.$$

C. Détermination du spectre de T .

Définition.

Soit S un endomorphisme continu de \mathbf{E} , on dit que S est inversible si S réalise une bijection de \mathbf{E} sur lui-même.

Remarque : \mathbf{E} étant complet, il résulte d'un théorème de BANACH que si S est bijectif et continu, alors S^{-1} est continu, de sorte que S est alors un élément inversible de l'algèbre des endomorphismes continus de E .

On appelle spectre de S , et on note $\sigma(S)$, l'ensemble des nombres complexes λ tels que $S - \lambda I_{\mathbf{E}}$ n'est pas inversible.

On admettra que $\sigma(S)$ est un fermé de \mathbf{C} .

1. Est-ce que 0 est dans $\sigma(T)$? Même question pour 1.

Dorénavant, on se donne un complexe λ vérifiant les hypothèses (L) du II.B. On garde les notations α, U, V, \dots du II.B.

2. Soient x et y deux éléments de \mathcal{E} . Vérifier que :

$$(**) \quad (T - \lambda I_{\mathbf{E}})(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 &= \frac{1}{1 - \lambda} y_0 \\ \forall k \geq 1, x_k &= \frac{1}{1 + (1 - \frac{1}{\lambda}) \frac{1}{k}} \left(x_{k-1} + \frac{1}{\lambda} (y_{k-1} - y_k - \frac{1}{k} y_k) \right) \end{cases}$$

3. On considère $y = \left(\frac{1}{k+1} \right)_{k \geq 0}$.

On considère la suite x (*a priori* élément de \mathcal{E}) telle que $(T - \lambda I_{\mathbf{E}})(x) = y$.

(a) Quel est le lien entre x et la suite α du II.B. ?

(b) En utilisant II.B. montrer que, si $\operatorname{Re}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) < 0$, alors $\lambda \in \sigma(T)$.

4. On suppose $\operatorname{Re}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) > 0$.

Soit y dans \mathbf{E} et soit x la suite définie par les formules (**) ci-dessus.

(a) Établir les relations suivantes :

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{x_k}{\alpha_k} = \frac{x_{k-1}}{\alpha_{k-1}} + \frac{1}{\lambda} \frac{y_{k-1} - y_k}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\lambda} \frac{y_k}{k\alpha_{k-1}}.$$

$$\forall k \geq 1, \quad x_k = \alpha_k y_0 + \frac{\alpha_k}{\lambda} \sum_{j=1}^k (y_{j-1} - y_j) \frac{1}{\alpha_{j-1}} - \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{j=1}^k \frac{y_j}{j\alpha_{j-1}} \right) \alpha_k.$$

(b) En remarquant que $\sum_{j=1}^k (y_{j-1} - y_j) \frac{1}{\alpha_{j-1}} = \sum_{j=1}^k y_j \left(\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}} \right) + \frac{y_0}{\alpha_0} - \frac{y_k}{\alpha_k}$, montrer qu'il existe une constante A_5 (indépendante de y et de k) telle que

$$\forall k \geq 0, \quad |x_k| \leq A_5 \|y\|.$$

5. Déterminer $\sigma(T)$ et le représenter sur un dessin.

Partie III. Propriétés régularisantes de T

Notations et terminologie

1. On sera amené à considérer des suites de suites (ou plus généralement des familles de suites).

Si I est un ensemble d'indices le symbole $\left((x_k^{(i)})_{k \geq 0} \right)_{i \in I}$ désigne la famille des suites $x^{(i)}$ indexées par I , $x_k^{(i)}$ est le terme d'indice k de la suite $x^{(i)}$.

Par exemple considérer $\left(\left(\frac{1}{(k+1)^n} \right)_{k \geq 0} \right)_{n \geq 0}$, c'est considérer les suites :

$$x^{(0)} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$$

$$x^{(1)} = (1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots)$$

$$x^{(2)} = (1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, \dots)$$

$$x^{(3)} = (1, 1/8, 1/27, 1/64, 1/125, \dots) \text{ etc.}$$

Dans l'énoncé, k désignera presque toujours l'indice des suites de complexes et n sera réservé à l'indexation des suites de suites.

2. Limites :

A priori, le mot suite, sans indication contraire, désigne un élément de \mathcal{E} ; aussi, lorsque l'on dit que la suite $(x_k^{(n)})_{k \geq 0}$ converge on veut dire que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(n)}$ existe dans \mathbf{C} .

Si on veut exprimer l'idée qu'il existe dans \mathbf{E} une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - x\| = 0$, on dira que la suite $(x^{(n)})$ d'éléments de \mathbf{E} converge dans \mathbf{E} vers x .

Les expressions utilisées seront suffisamment détaillées pour éviter toute ambiguïté.

A. Convergence simple

Définition. Soient $(x^{(n)})_{n \geq 0} = ((x_k^{(n)})_{k \geq 0})_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de \mathbf{E} et u dans \mathbf{E} . On dit que $(x^{(n)})_{n \geq 0}$ converge simplement vers $u = (u_k)_{k \geq 0}$ si pour tout $k \geq 0$, $(x_k^{(n)})_{n \geq 0}$ tend vers u_k quand n tend vers l'infini.

1. Exceptionnellement, dans cette question et la suivante, les suites de nombres complexes sont indexées par n pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement.

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes tendant vers ℓ dans \mathbf{C} .

Soit α un nombre complexe tel que $|\alpha| < 1$, on pose $u_n = \sum_{j=0}^n \alpha^j a_{n-j}$.

Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $\frac{\ell}{1-\alpha}$.

2. Soient v et w deux suites de nombres complexes telles que :

$$\begin{cases} \text{Pour tout entier } n \geq 0, & v_{n+1} = \alpha v_n + w_n, \\ (w_n)_{n \geq 0} \text{ converge vers } \ell. \end{cases}$$

Montrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ converge vers $\frac{\ell}{1-\alpha}$.

3. Soit x une suite de nombres complexes. On pose $a = x_0$ et $b = x_1$. On considère la suite $(x^{(n)})_{n \geq 0}$ d'éléments de \mathbf{E} définie par $x^{(n)} = T^n x$, en convenant que $x^{(0)} = x$.

(a) Calculer $x_0^{(n)}$. Quelle est la limite de la suite $x_0^{(n)}$?

(b) Calculer $x_1^{(n)}$. Quelle est la limite de la suite $x_1^{(n)}$?

(c) Montrer que :

$$\forall k, n \geq 0, x_{k+1}^{(n+1)} = \frac{1}{k+2} x_{k+1}^{(n)} + \frac{1}{k+2} \sum_{j=0}^k x_j^{(n)}.$$

(d) Montrer que $x^{(n)}$ converge simplement vers la suite constante égale à a .

4. Montrer que, si $(x^{(n)})_{n \geq 0}$ converge dans \mathbf{E} , alors sa limite est la suite constante égale à a .

5. On suppose que $a = 0$ et que la suite (x_k) a une limite $c \neq 0$ dans \mathbf{C} .

Montrer que $(x^{(n)})_{n \geq 0}$ diverge dans \mathbf{E} .

B. Lissage : un résultat négatif

Pour n entier fixé, on note $\mathbf{E}_n = \{x \in \mathbf{E} \text{ telles que } T^n x \text{ converge dans } \mathbf{C}\}$. \mathbf{E}_n est un sous-espace vectoriel de \mathbf{E} (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

On admet le théorème suivant :

Soit \mathbf{F} un espace de Banach. Si pour tout $n \geq 0$, \mathbf{F}_n est un sous ensemble de \mathbf{F} fermé et d'intérieur vide, alors la réunion de tous les \mathbf{F}_n est aussi d'intérieur vide.

1. Soit \mathbf{F} un espace vectoriel normé et G un sous espace vectoriel de \mathbf{F} d'intérieur non vide.

Ainsi G contient une boule ouverte de \mathbf{F} , de centre x_0 et de rayon ε strictement positif.

En utilisant la structure d'espace vectoriel, montrer successivement que :

(a) G contient la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε ,

(b) $\mathbf{F} = G$.

2. On admet provisoirement, dans cette question, que $\mathbf{E}_n \neq \mathbf{E}$ pour tout entier $n \geq 0$.

(a) Montrer que \mathbf{E}_c est un sous espace fermé de \mathbf{E} .

(b) Montrer que l'ensemble des x de \mathbf{E} tels que, pour tout $n \geq 0$, la suite $T^n x$ ne soit pas convergente dans \mathbf{C} est dense dans \mathbf{E} .

3. On prouve dans cette question ce qui est admis à la question précédente.

(a) Soient t_0 un nombre réel positif et f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$, à valeurs dans \mathbf{C} .

Pour $n \geq 0$, on note (H_n) l'hypothèse :

$$(H_n) \quad \exists t_1 \geq t_0, \quad \forall j \leq n, \quad \exists M_j, \quad \forall t > t_1, \quad |f^{(j)}(t)| \leq \frac{M_j}{t^j} \quad \text{avec } f^{(0)} = f$$

.

Pour $t \geq t_0 + 1$, on pose $g(t) = (t+1)f(t) - tf(t-1)$. La fonction g est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[t_0 + 1, \infty[$.

On suppose (H_n) vérifiée pour la fonction f et un entier $n \geq 1$.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que g vérifie (H_{n-1}) .

- (b) Soit n un entier ≥ 1 et soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle $[0, \infty[$, satisfaisant l'hypothèse (H_n) avec $t_0 = 0$. Pour tout entier $k \geq 0$, on pose $y_k = f(k)$. Montrer par récurrence sur n qu'il existe x dans \mathbf{E} telle que $y = T^n x$.
- (c) On pose $y = (\exp(i \ln(k+1)))_{k \geq 0}$.
- Montrer que y est dans $\text{Im}(T^n)$ pour tout $n \geq 0$.
 - En déduire que, pour tout $n \geq 0$, \mathbf{E}_n est différent de \mathbf{E} .

C. Aspect probabiliste

On appelle Ω l'ensemble des suites de nombres réels appartenant à $[0, 1]$.

Étant donné un entier naturel n et deux suites finies de nombres réels $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ vérifiant pour tout j les inégalités $0 \leq a_j \leq b_j \leq 1$, on désigne par $K_{a,b}$ le pavé $K_{a,b} = \{x \in \mathbf{R}^{n+1}, \forall j, a_j \leq x_j \leq b_j\}$.

Le volume de $K_{a,b}$ est par définition le réel $v(K_{a,b}) = \prod_{j=0}^n (b_j - a_j)$.

On associe à K la partie Ω_K de Ω définie par

$$\Omega_K = \{x = (x_k)_{k \geq 0}, (x_0, x_1, \dots, x_n) \in K\}.$$

On admettra qu'il existe sur Ω une tribu contenant tous les Ω_K et sur cette tribu \mathcal{B} une probabilité P telle que $P(\Omega_K) = v(K)$ pour tout pavé K .

On définit enfin, pour k entier naturel, la variable aléatoire réelle X_k , application de Ω dans \mathbf{R} , qui à $x = (x_i)_{i \geq 0}$ associe $X_k(x) = x_k$.

- Montrer que $(X_k)_{k \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et identifier cette loi.
- Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < 1$.
Calculer, pour $n \geq 0$ et $p \geq 1$, $P(\{\omega \in \Omega \mid |X_j(\omega) - X_n(\omega)| < \varepsilon \text{ pour } j = n+1, n+2, \dots, n+p\})$.
- En déduire que x diverge presque sûrement (on pourra admettre que l'ensemble $\{x \in \Omega \mid x \text{ converge}\}$ est dans la tribu \mathcal{B}).
- En utilisant un théorème du programme, montrer que Tx converge presque sûrement.